常微分算子谱论

刘景麟　著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-3347.0101)



ISBN 978-7-03-023157-4

销售分类建议：高等数学

定 价：68.00 元

常微分算子谱论

刘景麟　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书论述了由线性常微分算式在空间 L^2 上所生成的线性算子的谱理论，及其亏指数及判定、自伴延拓、谱染特点、谱分解等. 有限区间情形给出 Liouville、Sturm 和泛函分析三种处理. 无限区间情形，详细讨论了二阶 Sturm–Liouville 算子经典的 Weyl 理论、极限点、圆的判别、自伴延拓的谱分解与 Titchmarsh 按特征函数的展开.

本书可供高等院校数学系本科生、研究生、教师及科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

常微分算子谱论/刘景麟著. —北京：科学出版社，2009
ISBN 978-7-03-023157-4

Ⅰ.常… Ⅱ.刘… Ⅲ.微分算子 Ⅳ.O175.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 155679 号

责任编辑：张 扬 房 阳／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 1 月第一次印刷 印张：24 3/4
印数：1—3 000 字数：487 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉)

前　言

常微分算子谱理论的研究, 可以上溯到 19 世纪 30 年代 Sturm 和 Liouville 的工作, 已经有近 200 年历史了. 由于线性叠加思想的广泛应用, 让它跟数学的众多分支 (微分方程、概率论、复变函数、特殊函数等) 都有了联系, 且成为了量子物理的基本数学工具. 它与物理的互动, 又催生了广义函数、局部凸拓扑线性空间、装备 Hilbert 空间 (即 Gelfand triplet) 等新的数学分支. 所以, 这个方向虽然古老, 但却是一个极富生命力的领域.

本书是在给内蒙古大学 1984 级研究生讲课的基础上整理形成的一本讲义, 曾在南京理工大学作为课程教材用过, 培养了若干届研究生. 我们希望它能把此课题在 20 世纪几个研究高潮里侧重于按特征展开所得到的主要结果反映出来:

(1) 早期 Weyl 的点圆分类工作;

(2) 四、五十年代 Titchmarsh, Levinson, Levitan 等英美国家和前苏联人的工作;

(3) 七、八十年代西方与我们自己 (内蒙古大学讨论班) 关于亏指数和自伴延拓的工作.

至于谱集和按广义特征泛函展开的研究则放弃了, 它们都是当今正在进行着的工作, 更适宜于过一阶段再小结.

2001 年夏, 南京理工大学数学系 1997 级何凌冰、吴海勇、徐冬元、王继贵、刘敬刚、袁非凡等同学冒着炎热, 非常费事地将本书部分书稿用 word 打印出来, 后来, 许孟博士提供了将 word 文件转化为 Latex 文件的软件, 黄振友博士将源程序改成了现在的 Latex 形式, 他的几届研究生何凌冰、金国海、杨传富、陈卫民、王平心、陈建华、王兰宁、张艳霞、向会立、王一操、张茂柱、冯明勇、吴春莲、李丽、施德才等阅读书稿提出了不少修改意见, 特别是, 张茂柱又打印了亏指数理论部分, 李丽、施德才打印了例子部分并在 Latex 下将全书的图作出, 许孟博士帮助修改了部分稿件, 在此, 对这些老师和同学的辛勤劳动表示衷心感谢!

刘景麟
2007 年夏于南京

目　录

第 1 章　常微分算式所定义的微分算子

1.1　基本概念与性质

定义 1.1.1　设 I 是 $\mathbf{R}$ 上的区间, 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 设 $a_k\in C^k(I), k=0,1,\cdots,n$, 称

$$M=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)D^k=a_n(x)D^n+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\cdots+a_1(x)D+a_0(x)$$

为区间 I 上的微分算式, 如果

$$a_n(x)\neq 0,\quad x\in I,$$

则称 M 是正则的, 否则称 M 是非正则的.

定理 1.1.1(存在唯一定理)　设

(1) M 为区间 I 上的正则微分算式;

(2) g 是复值可测函数, $g\in L_{\mathrm{loc}}(I)$,

$$x_0\in I,\quad \begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathbf{C}^n,$$

则存在唯一的 $y\in A^n(I)=\{f|f\in C^{n-1}(I), D^{n-1}f\in AC_{\mathrm{loc}}(I)\}$, 使得

$$\begin{cases} My=g,\\ \begin{pmatrix} y\\ Dy\\ \vdots\\ D^{n-1}y\end{pmatrix}(x_0)=\begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_{n-1}\end{pmatrix}.\end{cases}$$

证明　(1) 设 I 是闭区间, 把微分方程化为微分方程组, 令

$$y_0=y,\quad y_1=Dy,\quad \cdots,\quad y_{n-1}=D^{n-1}y,$$

则方程变成

$$\begin{cases} Dy_0 = y_1, \\ Dy_1 = y_2, \\ \cdots\cdots \\ Dy_{n-2} = y_{n-1}, \\ Dy_{n-1} = \dfrac{1}{a_n(x)}\left(g(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y_k\right), \end{cases} \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}(x_0) = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

显然方程的 Cauchy 问题解存在唯一与方程组的 Cauchy 问题解存在唯一是等价的. 将后者写成矩阵形式

$$\boldsymbol{DY} + \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{G}(x), \quad \boldsymbol{Y}(x_0) = \boldsymbol{C},$$

其中,

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_0(x) \\ y_1(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \dfrac{a_0(x)}{a_n(x)} & \dfrac{a_1(x)}{a_n(x)} & \dfrac{a_2(x)}{a_n(x)} & \cdots & \dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{g(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}(x_0) = \begin{pmatrix} y_0(x_0) \\ y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x_0) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix},$$

而矩阵形式的微分方程组 Cauchy 问题又与积分方程

$$\boldsymbol{Y}(x) + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Y}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{C} + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{G}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{H}(x)$$

等价. 在空间 $\prod\limits_{n} L^1(I) = \overbrace{L^1(I) \times \cdots \times L^1(I)}^{n}$ 上引进算子 $\varPhi$

$$(\varPhi\boldsymbol{Y})(x) = \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Y}(t)\mathrm{d}t,$$

则积分方程可表成

$$(I + \varPhi)\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H},$$

我们来证明 $(I+\varPhi)^{-1}$ 存在, 因而

$$\boldsymbol{Y}=(I+\varPhi)^{-1}\boldsymbol{H}.$$

为此要估计 $\varPhi^m$ 的范数. 设向量 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}$ 的范数为 $\|\boldsymbol{v}\|=\sum\limits_{j=1}^{n}|v_j|$, 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{jk})$ 的范数为 $\|\boldsymbol{A}\|=\sum\limits_{j,k=1}^{n}|a_{jk}|$, 则 $\|\boldsymbol{Av}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{v}\|$. 设 $\boldsymbol{Y}\in\prod\limits_{n}L^1(I)$ 的范数为

$$\|\boldsymbol{Y}\|=\int_I\|\boldsymbol{Y}(x)\|\mathrm{d}x,$$

于是

$$\|\varPhi\boldsymbol{Y}(x)\|=\left\|\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Y}(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\|\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Y}(t)\|\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\|\boldsymbol{A}(t)\|\|\boldsymbol{Y}(t)\|\mathrm{d}t\right|\leqslant K\|\boldsymbol{Y}\|,$$

(其中, $K=\max\limits_{x\in I}\|\boldsymbol{A}(x)\|$)

$$\|\varPhi\boldsymbol{Y}\|=\int_I\|\varPhi\boldsymbol{Y}(x)\|\mathrm{d}x\leqslant K\mu(I)\|\boldsymbol{Y}\|,$$

$$\|\varPhi^2\boldsymbol{Y}(x)\|=\left\|\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{A}(t)\varPhi\boldsymbol{Y}(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\|\boldsymbol{A}(t)\|\|\varPhi\boldsymbol{Y}(t)\|\mathrm{d}t\right|\leqslant K^2\|\boldsymbol{Y}\||x-x_0|,$$

$$\|\varPhi^2\boldsymbol{Y}\|=\int_I\|\varPhi^2\boldsymbol{Y}(x)\|\mathrm{d}x\leqslant K^2\alpha\mu(I)\|\boldsymbol{Y}\|,\quad \alpha=\max_{x\in I}|x-x_0|,$$

$$\|\varPhi^3\boldsymbol{Y}(x)\|=\left\|\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{A}(t)\varPhi^2\boldsymbol{Y}(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\|\boldsymbol{A}(t)\|\|\varPhi^2\boldsymbol{Y}(t)\|\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{K^3\|\boldsymbol{Y}\|}{2}|x-x_0|^2,$$

$$\|\varPhi^3\boldsymbol{Y}\|=\int_I\|\varPhi^3\boldsymbol{Y}(x)\|\mathrm{d}x\leqslant\frac{K^3\alpha^2\mu(I)}{2}\|\boldsymbol{Y}\|.$$

一般地, 用归纳法可得

$$\|\varPhi^m\boldsymbol{Y}(x)\|\leqslant\frac{K^m\|\boldsymbol{Y}\|}{(m-1)!}|x-x_0|^{m-1},$$

$$\|\varPhi^m\boldsymbol{Y}\|\leqslant\frac{K^m\alpha^{m-1}\mu(I)}{(m-1)!}\|\boldsymbol{Y}\|.$$

于是

$$\|\varPhi^m\|\leqslant K\mu(I)\frac{(K\alpha)^{m-1}}{(m-1)!},\quad m=1,2,\cdots,$$

所以

$$(I+\varPhi)^{-1}=I-\varPhi+\varPhi^2-\varPhi^3+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varPhi^m$$

存在, 积分方程的解存在且唯一. 因为 $\boldsymbol{H}(x), \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Y}(t)\mathrm{d}t$ 绝对连续, 故 $\boldsymbol{Y}(x)$ 绝对连续.

(2) I 不是闭区间.

对任何 I 的闭子区间 J, $x_0 \in J$, 存在唯一的 $y_J \in A^n(J)$, 使得

$$\begin{cases} My_J = g, \\ D^k y_J(x_0) = c_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \end{cases}$$

由唯一性知

$$y_{J_1}(x) = y_{J_2}(x), \quad x \in J_1 \cap J_2$$

所以, 令

$$y(x) = y_J(x), \quad x \in J.$$

便可以在 I 上定义一个单值的 $y \in A^n(I)$, 使得

$$\begin{cases} My = g, & x \in I, \\ D^k y(x_0) = c_k, & k = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

由子区间上的唯一性知 y 唯一.

推论 1.1.1　如果 $a_k \in C^{\infty}(I), k = 0, 1, \cdots, n$, 而 $g \in C^l(I)$, 则解 $y \in C^{n+l}(I)$.

证明

$$D^n y = \frac{1}{a_n(x)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(-a_k(x) D^k y(x) \right) + g(x) \right).$$

因为 $y \in A^n(I)$, 所以右边属于 $C(I)$. 于是 $y \in C^n(I)$. 这样右边又属于 $C^1(I)$, 于是 $y \in C^{n+1}(I)$. 如此下去可得 $y \in C^{n+l}(I)$.

假设 $I = [a, b]$, 而 $f, g \in C^n(I)$, 考虑积分

$$(Mf, g) = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x) D^k f(x) \overline{g(x)} \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b a_k(x) D^k f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x,$$

如果 $k > 0$, 利用分部积分

$$\begin{aligned}
\int_a^b a_k(x) D^k f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x &= D^{k-1} f(x) a_k(x) \overline{g(x)} |_a^b - \int_a^b D^{k-1} f(x) D(a_k(x) \overline{g(x)}) \mathrm{d}x \\
&= [D^{k-1} f(x) a_k(x) \overline{g(x)} - D^{k-2} f(x) D(a_k(x) \overline{g(x)})] |_a^b \\
&\quad + (-1)^2 \int_a^b D^{k-2} f(x) D^2 (a_k(x) \overline{g(x)}) \mathrm{d}x \\
&= \cdots\cdots \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} D^{k-j} f(x) D^{j-1} (a_k(x) \overline{g(x)}) |_a^b \\
&\quad + (-1)^k \int_a^b f(x) D^k (a_k(x) \overline{g(x)}) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

于是得

$$(Mf,g)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}D^{k-j}f(x)D^{j-1}(a_k(x)\overline{g(x)})|_a^b$$
$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_a^b f(x)D^k(a_k(x)\overline{g(x)})\mathrm{d}x.$$

定义 1.1.2 设 $M=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x)D^k$ 是 I 上的微分算式, 称

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kD^k\overline{a_k(x)}$$

为 M 的共轭微分算式, 记为 M^+.

M^+ 的首项系数是

$$(-1)^n\overline{a_n(x)},$$

所以当 M 正则时, 它也是 I 上的正则微分算式.

定义 1.1.3 称 $[f,g](x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}D^{k-j}f(x)\cdot D^{j-1}\left(a_k(x)\overline{g(x)}\right)$ 为 M 的 Lagrange 双线性型.

显然

$$[\alpha f_1+\beta f_2,g]=\alpha[f_1,g]+\beta[f_2,g],$$

$$[f,\alpha g_1+\beta g_2]=\overline{\alpha}[f,g_1]+\overline{\beta}[f,g_2].$$

引理 1.1.1(Green 公式) 设 M 是 I 上的微分算式, 记

$$H_M^n(I)=\left\{f\in A^n(I)\,\middle|\,f,Mf\in L^2(I)\right\},$$

则对任意的 $f,g\in H_M^n(I)$, 有

$$(Mf,g)=(f,M^+g)+[f,g]|_a^b.$$

下面具体地考察一下 Lagrange 双线性型. 由 Leibnitz 公式

$$D^{j-1}\left(a_k(x)\overline{g(x)}\right)=\sum_{l=0}^{j-1}\begin{pmatrix}j-1\\l\end{pmatrix}D^{j-1-l}a_k(x)D^l\overline{g(x)},$$

所以

$$[f,g](x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{j-1}(-1)^{j-1}\begin{pmatrix}j-1\\l\end{pmatrix}D^{k-j}f(x)D^{j-1-l}a_k(x)D^l\overline{g(x)}.$$

于是 $1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n,\ 0 \leqslant l \leqslant n-1$, 而求和的范围就是图 1.1 里的那个黑立体, 故

$$\text{上式} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=l+1}^{n} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{j-1} \begin{pmatrix} j-1 \\ l \end{pmatrix} D^{j-1-l} a_k(x) D^{k-j} f(x) D^l \overline{g(x)},$$

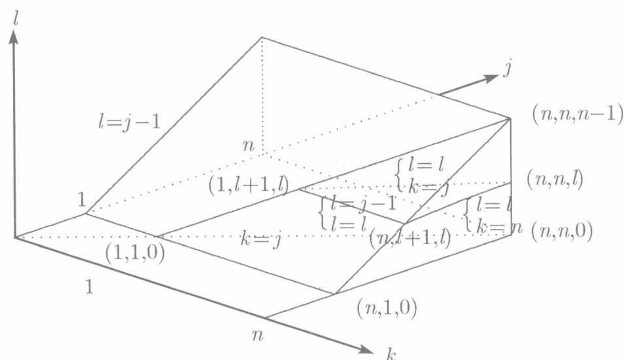


图 1.1

令 $k = j + k'$, 则得

$$\text{上式} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=l+1}^{n} \sum_{k'=0}^{n-j} (-1)^{j-1} \begin{pmatrix} j-1 \\ l \end{pmatrix} D^{j-1-l} a_{j+k'}(x) D^{k'} f(x) D^l \overline{g(x)},$$

令 $j - 1 = j'$,

$$\text{上式} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j'=l}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-j'-1} (-1)^{j'} \begin{pmatrix} j' \\ l \end{pmatrix} D^{j'-l} a_{j'+k'+1}(x) D^{k'} f(x) D^l \overline{g(x)}.$$

后面两个和号是在图 1.2 的三角形里求和, 故

$$\text{上式} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-l-1} \sum_{j'=l}^{n-k'-1} (-1)^{j'} \begin{pmatrix} j' \\ l \end{pmatrix} D^{j'-l} a_{j'+k'+1}(x) D^{k'} f(x) D^l \overline{g(x)},$$

整理一下, 最后得

$$[f, g](x) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-j-1} \sum_{l=j}^{n-k-1} (-1)^l \begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} D^{l-j} a_{k+l+1}(x) D^k f(x) D^j \overline{g(x)}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} F_{jk} D^k f(x) D^j \overline{g(x)} = \left(F(x) \begin{pmatrix} f(x) \\ Df(x) \\ \vdots \\ D^{n-1} f(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x) \\ Dg(x) \\ \vdots \\ D^{n-1} g(x) \end{pmatrix} \right),$$

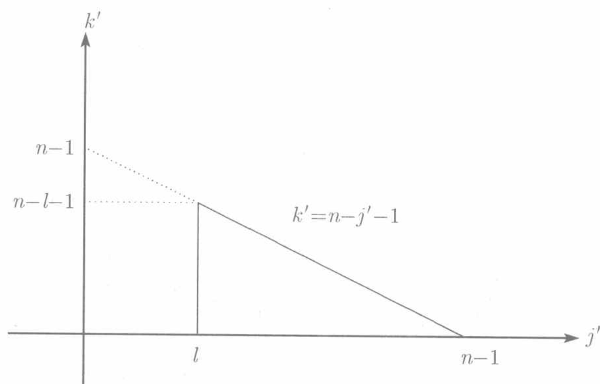


图 1.2

这里

$$F_{jk}(x)=\begin{cases}\sum\limits_{l=j}^{n-k-1}(-1)^l\begin{pmatrix}l\\j\end{pmatrix}D^{l-j}a_{k+l+1}(x), & 0\leqslant k\leqslant n-j-1\,(0\leqslant k+j\leqslant n-1),\\[2ex] 0, & n-j-1<k\leqslant n-1\,(n-1<k+j).\end{cases}$$

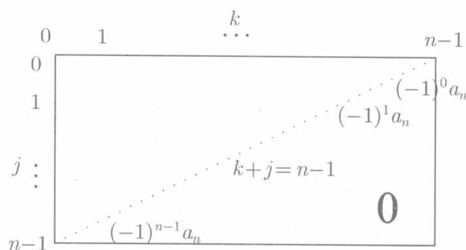


图 1.3

当 $k+j=n-1$ 时, $n-k-1=j$,

$$F_{jk}(x)=(-1)^j\begin{pmatrix}j\\j\end{pmatrix}a_{k+j+1}(x)=(-1)^j a_n.$$

引理 1.1.2 称 $\boldsymbol{F}=(F_{jk}(x))$ 为 Lagrange 双线性型 $[\cdot,\cdot]$ 的矩阵, 当 M 为正则微分算式时, 这个矩阵是非退化的.

证明 $\det(F_{jk}(x))=a_n^n(x)\neq 0$.

引理 1.1.3 设 L,M 是 I 上的微分算式, 则

(1) $(L+M)^+=L^++M^+$;

(2) $L^{++}=L$;

(3) $(ML)^{+}=L^{+}M^{+}$.

证明　设

$$L=\sum_{k=0}^{n}p_kD^k,\quad M=\sum_{k=0}^{m}q_kD^k,\quad n\geqslant m.$$

(1)

$$\begin{aligned}(L+M)^{+}&=\left(\sum_{k=0}^{m}(p_k+q_k)D^k+\sum_{k=m+1}^{n}p_kD^k\right)^{+}\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kD^k\overline{(p_k+q_k)}+\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^kD^k\overline{p_k}\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kD^k\overline{p_k}+\sum_{k=0}^{m}(-1)^kD^k\overline{q_k}=L^{+}+M^{+}.\end{aligned}$$

(2) 记 $L_k=p_kD^k$, 则 $L=\sum\limits_{k=0}^{n}L_k$. 于是

$$L^{+}=\sum_{k=0}^{n}L_k^{+},\quad L^{++}=\sum_{k=0}^{n}L_k^{++}.$$

只需证明 $L_k^{++}=L_k$ 即可.

$$(pD^k)^{+}=(-1)^kD^k\overline{p}=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(D^{k-j}\overline{p}\right)D^j,$$

$$\begin{aligned}\left(pD^k\right)^{++}&=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^jD^j\overline{D^{k-j}\overline{p}}\\&=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}\left(D^{k-j-m}p\right)D^m\\&=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}\sum_{m=0}^{j}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{j}{m}\left(D^{k-j-m}p\right)D^m\\&=(-1)^k\sum_{m=0}^{k}\left(\sum_{j=m}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{j}{m}\right)\left(D^{k-j-m}p\right)D^m.\end{aligned}$$

考虑

$$\sum_{j=m}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{j}{m}\overset{j=m+j'}{=\!=\!=}\sum_{j'=0}^{k-m}(-1)^{m+j'}\binom{k}{m+j'}\binom{m+j'}{m},$$

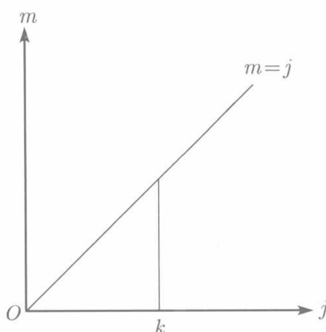


图 1.4

因为

$$\binom{k}{m+j'}\binom{m+j'}{m}=\frac{k!}{(m+j')!\,(k-m-j')!}\frac{(m+j')!}{m!j'!}=\frac{k!}{m!\,(k-m)!}\frac{(k-m)!}{(k-m-j')!j'!}$$
$$=\binom{k}{m}\binom{k-m}{j'},$$

所以

$$\sum_{j=m}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{j}{m}=(-1)^m\binom{k}{m}\sum_{j'=0}^{k-m}(-1)^{j'}\binom{k-m}{j'}.$$

而

$$0=(1-1)^{k-m}=\sum_{j'=0}^{k-m}\binom{k-m}{j'}1^{k-m-j'}(-1)^{j'}=\sum_{j'=0}^{k-m}(-1)^{j'}\binom{k-m}{j'},\quad m\neq k,$$

故得

$$\left(pD^k\right)^{++}=(-1)^k(-1)^k\binom{k}{k}\binom{k}{k}pD^k=pD^k.$$

(3) 记 $L_k=p_kD^k$, $M_j=q_jD^j$, 则

$$ML=\left(\sum_{j=0}^{m}M_j\right)\left(\sum_{k=0}^{n}L_k\right)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}M_jL_k,$$
$$(ML)^+=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(M_jL_k)^+,$$

只需证明 $(M_jL_k)^+=L_k^+M_j^+$ 即可. 设 $L=pD^k, M=qD^l$, 则

$$
\begin{aligned}
ML &= qD^l pD^k = q\sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}p^{(l-j)}D^{k+j},\\
(ML)^+ &= \sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}(-1)^{k+j}D^{k+j}\overline{p^{(l-j)}q}\\
&= (-1)^k\sum_{j=0}^{l}(-1)^j\binom{l}{j}D^k\left(D^j\overline{(D^{l-j}p)\,q}\right)\\
&= (-1)^k\sum_{j=0}^{l}(-1)^j\binom{l}{j}D^k\left(\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}\left(D^{l-s}\overline{p}\right)D^s\overline{q}\right)\\
&= (-1)^k\sum_{j=0}^{l}(-1)^j\binom{l}{j}\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\left(D^{l+k-s-t}\overline{p}\right)D^{s+t}\overline{q}\\
&= (-1)^k\sum_{s=0}^{l}\left(\sum_{j=s}^{l}(-1)^j\binom{l}{j}\binom{j}{s}\right)\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\left(D^{l+k-s-t}\overline{p}\right)D^{s+t}\overline{q},
\end{aligned}
$$

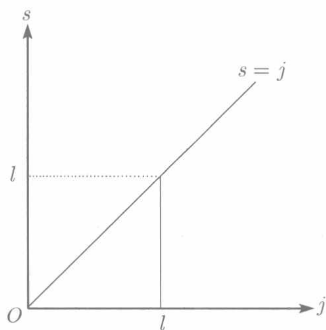


图 1.5

与 (2) 同, 有

$$
\sum_{j=s}^{l}(-1)^j\binom{l}{j}\binom{j}{s}=0,\quad s\neq l,
$$

故得

$$
\begin{aligned}
(ML)^+ &= (-1)^k(-1)^l\binom{l}{l}\binom{l}{l}\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\left(D^{k-t}\overline{p}\right)D^{l+t}\overline{q}\\
&= (-1)^{k+l}\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\left(D^{k-t}\overline{p}\right)D^{l+t}\overline{q}.
\end{aligned}
$$

另一方面又有

$$L^+M^+ = \left((-1)^k D^k \overline{p}\right)\left((-1)^l D^l \overline{q}\right) = (-1)^{k+l} D^k \overline{p} D^l \overline{q}$$
$$= (-1)^{k+l} \sum_{t=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} \left(D^{k-t}\overline{p}\right) D^{l+t}\overline{q},$$

所以 $(ML)^+ = L^+M^+$.

定义 1.1.4 微分算式 M 称为是对称的, 如果 $M^+ = M$.

下面来推导对称微分算式的一般形状. 由于

$$pD^{2k} = D^k p D^k + \cdots,$$
$$pD^{2k+1} = D^k (pD) D^k + \cdots = D^k (Dp) D^k + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} D^k (pD + Dp) D^k + \cdots,$$

所以微分算式 M 总可以表成 $D^k p D^k$ 和 $\frac{1}{2}D^k(pD+Dp)D^k, k = 0,1,2,\cdots$ 的线性组合.

例如,

$$\begin{aligned} M &= p_2 D^2 + p_1 D + p_0 \\ &= -D(-p_2)D - p_2' D + p_1 D + p_0 \\ &= -D(-p_2)D + (p_1 - p_2')D + p_0 \\ &= -D(-p_2)D + \left(\frac{p_1 - p_2'}{2} D + D\frac{p_1 - p_2'}{2}\right) + p_0 - \frac{p_1' - p_2''}{2} \\ &= -Dq_2 D + (q_1 D + Dq_1) + q_0. \end{aligned}$$

因为

$$(D^k p D^k)^+ = (D^k)^+ p^+ (D^k)^+ = (-1)^k D^k \overline{p} (-1)^k D^k = D^k \overline{p} D^k,$$
$$\left(\frac{1}{2} D^k (pD + Dp) D^k\right)^+ = \frac{1}{2}\left(D^k\right)^+ (pD + Dp)^+ (D^k)^+ = -\frac{1}{2} D^k (\overline{p}D + D\overline{p}) D^k,$$

所以, 当 p 是实函数时,

$$(-1)^k D^k p D^k, \quad \frac{\mathrm{i}}{2} D^k (pD + Dp) D^k$$

都是对称微分算式. 假设 M 是 n 阶的对称微分算式, 首项系数为 a_n, 则 M^+ 的首项系数是 $(-1)^n \overline{a_n}$, 这时

$$(-1)^n \overline{a_n} = a_n,$$

所以 n 为偶数时, a_n 是实函数; n 为奇数时, $a_n + \overline{a_n} = 0$, a_n 是纯虚函数, 即 $a_n = \mathrm{i}\widetilde{a}_n$, $\widetilde{a}_n$ 是某实函数. 由于

n 为偶数时, $(-1)^{\frac{n}{2}} D^{\frac{n}{2}} a_n D^{\frac{n}{2}}$ 是对称的;

n 为奇数时, $\frac{\mathrm{i}}{2}D^{\frac{n-1}{2}}\left(\widetilde{a}_nD+D\widetilde{a}_n\right)D^{\frac{n-1}{2}}$ 是对称的,

于是, $M-D^{\frac{n}{2}}a_nD^{\frac{n}{2}}$ 或 $M-\frac{\mathrm{i}}{2}D^{\frac{n-1}{2}}\left(\widetilde{a}_nD+D\widetilde{a}_n\right)D^{\frac{n-1}{2}}$ 是$n-1$ 阶对称的微分算式. 这样逐步将阶数下降, 最后便得出

定理 1.1.2 任何 n 阶对称的微分算式, 都具有下述形状:

$$M=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^kD^ka_k(x)D^k+\mathrm{i}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}D^k\left(b_k(x)D+Db_k(x)\right)D^k,$$

其中, a_k 和 b_k 都是实函数.

推论 1.1.2 实对称的微分算式是偶阶的, 其形状为

$$M=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kD^ka_k(x)D^k,$$

其中, a_k 是实函数.

特别地, 二阶对称微分算式是

$$-DpD+q,$$

其中, p 和 q 都是实函数, 通常称这个微分算式为 Sturm-Liouville 算式, $\mathrm{i}D$ 则是一阶对称微分算式.

下面考察几个简单对称微分算式的 Lagrange 双线性形式:

(1) 一阶对称微分算式 $\mathrm{i}D$,

$$[f,g]|_a^b=(\mathrm{i}Df,g)-(f,\mathrm{i}Dg)=(\mathrm{i}f',g)-(f,\mathrm{i}g')=\mathrm{i}f\overline{g}|_a^b,$$

所以

$$[f,g](x)=\mathrm{i}f(x)\overline{g(x)},\quad \boldsymbol{F}(x)=(\mathrm{i}).$$

(2) Sturm-Liouville 微分算式 $-DpD+q,\quad p,q$ 为实函数,

$$\begin{aligned}[f,g]|_a^b&=(-DpDf+qf,g)-(f,-DpDg+qg)\\&=-pf'\overline{g}|_a^b+\int_a^b pf'\overline{g}'\mathrm{d}x-(f,-DpDg)\\&=-pf'\overline{g}|_a^b+pf\overline{g}'|_a^b=p\left(f\overline{g}'-f'\overline{g}\right)|_a^b,\end{aligned}$$

所以

$$[f,g](x)=p(x)\left(f(x)\overline{g'(x)}-f'(x)\overline{g(x)}\right)=p(x)W(f,\overline{g})(x).$$

因为 $a_2(x)=-p(x),a_1(x)=-p'(x),a_0(x)=q(x)$, 而

$$F_{jk}(x)=\sum_{l=j}^{n-k-1}(-1)^l\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix}D^{l-j}a_{k+l+1}(x),\quad 0\leqslant k+j\leqslant n-1,$$

所以

$$F_{00}(x)=\sum_{l=0}^{1}(-1)^l\begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix}D^{l}a_{l+1}(x)=a_1(x)-Da_2(x)=-p'(x)+p'(x)=0.$$

于是

$$\boldsymbol{F}(x)=\begin{pmatrix} 0 & -p(x) \\ p(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$[f,g](x)=\left(\boldsymbol{F}(x)\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix},\begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}\right).$$

(3) Titchmarsh 微分算式 $-D^2+q$, q 为实函数,

$$[f,g](x)=W(f,\overline{g})(x),$$
$$\boldsymbol{F}(x)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

引理 1.1.4 设 $a<b$, 则存在 $h\in C^\infty(\mathbf{R})$, 使得

$$h(x)=\begin{cases} 1, & x\leqslant a, \\ 0, & x\geqslant b. \end{cases}$$

证明

$$\rho(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{1/x}, & x<0, \\ 0, & x\geqslant 0 \end{cases}\in C^\infty(\mathbf{R}),$$

取 $\delta<b-a$, 令

$$\widetilde{h}(x)=\frac{\rho\left((x-a)^2-\delta^2\right)}{\rho\left((x-a)^2-\delta^2\right)+\rho\left(\dfrac{\delta^2}{4}-(x-a)^2\right)},$$

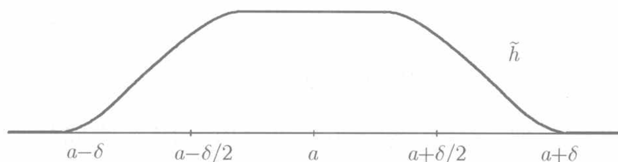


图 1.6

则由于分母从不为零, $\widetilde{h} \in C^\infty(\mathbf{R})$ 且

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} 1, & |x-a| \leqslant \dfrac{\delta}{2}, \\ 0, & |x-a| \geqslant \delta. \end{cases}$$

修改 $\widetilde{h}$ 使得当 $x < a - \dfrac{\delta}{2}$ 时, 函数值取 1, 则得到所要的 h.

定理 1.1.3 若 M 是区间 I 上的对称正则微分算式, 则

(1) $[f,g](x) = -\overline{[g,f](x)}$, $x \in I$;

(2) $\boldsymbol{F}^*(x) = -\boldsymbol{F}(x), \left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^*(x) = -\boldsymbol{F}^{-1}(x)$.

证明 (1) 当 $x, x' \in I, x < x'$ 时, 由 Green 公式,

$$\int_x^{x'} Mf(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t - \int_x^{x'} f(t)\overline{Mg(t)}\mathrm{d}t = [f,g]_x^{x'}.$$

取 $h \in C^\infty(\mathbf{R})$ 如图 1.7 所示:

$$\begin{aligned} [f,g](x) &= -[f,hg]_x^{x'} = -\int_x^{x'} \left(Mf(t)\overline{h(t)g(t)} - f(t)\overline{Mh(t)g(t)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x'} \overline{\left(Mh(t)g(t)\overline{f(t)} - h(t)g(t)\overline{Mf(t)}\right)\mathrm{d}t} \\ &= \overline{[hg,f]_x^{x'}} = -\overline{[g,f]}(x). \end{aligned}$$

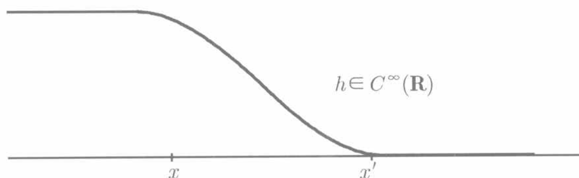


图 1.7

(2)

$$[f,g](x) = (\boldsymbol{F}(x)\sigma f(x), \sigma g(x)) = (\sigma f(x), \boldsymbol{F}(x)^*\sigma g(x)),$$

而

$$左式 = -\overline{[g,f](x)} = -\overline{(\boldsymbol{F}(x)\sigma g(x), \sigma f(x))} = (\sigma f(x), -\boldsymbol{F}(x)\sigma g(x)),$$

所以

$$(\sigma f(x), (\boldsymbol{F}(x)^* + \boldsymbol{F}(x))\,\sigma g(x)) = 0.$$

由微分方程存在唯一定理, $\sigma f(x)$ 与 $\sigma g(x)$ 可以取一切 n 维向量. 所以

$$\boldsymbol{F}(x)^* = -\boldsymbol{F}(x).$$

另外, 由 $\boldsymbol{F}(x)\boldsymbol{F}(x)^{-1}=\boldsymbol{I}$ 得

$$\left(\boldsymbol{F}(x)^{-1}\right)^{*}\boldsymbol{F}(x)^{*}=\boldsymbol{I},$$

所以 $\left(\boldsymbol{F}(x)^{-1}\right)^{*}=\left(\boldsymbol{F}(x)^{*}\right)^{-1}=-\boldsymbol{F}(x)^{-1}$.

定义 1.1.5 设 M 是区间 I 上的 n 阶正则微分算式, M 在空间 $L^2(I)$ 上生成的最大算子 $T_1(M)$ 定义如下:

$$\mathscr{D}(T_1(M))=\left\{f\,|\,f\in L^2(I),D^{n-1}f\in AC_{\rm loc}(I),Mf\in L^2(I)\right\},$$
$$T_1(M)f=Mf,\quad f\in\mathscr{D}(T_1(M)).$$

由于 $D^{n-1}f\in AC_{\rm loc}(I)$, 所以 D^nf 在 I 上几乎处处有意义, 于是 Mf 在 I 上几乎处处有意义. 这样得到的 $T_1(M)$ 是一个微分算子, $\mathscr{D}(T_1(M))$ 是 M 所能作用的最大区域, 因而称为最大算子. 由于 $C_0^\infty\left(\mathring{I}\right)\subset\mathscr{D}(T_1(M))$, 而 $C_0^\infty\left(\mathring{I}\right)$ 在 $L^2(I)$ 中稠, 所以 $T_1(M)$ 是稠定线性算子.

定义 1.1.6 设 M 是区间 I 上的正则微分算式, $T_1(M)$ 限制在 $C_0^\infty\left(\mathring{I}\right)$ 上得到的算子的最小闭延拓称为 M 在 $L^2(I)$ 上生成的最小算子, 记作 $T_0(M)$, 即

$$T_0(M)=\overline{T_1(M)|_{C_0^\infty\left(\mathring{I}\right)}}.$$

这也就是说,

$$\mathscr{D}(T_0(M))=\left\{f\,|\,f\in L^2(I),\exists\{f_n\}\subset C_0^\infty\left(\mathring{I}\right),\text{ 使得 }\lim_{n\to\infty}f_n=f,\ \lim_{n\to\infty}Mf_n=g\right\},$$
$$T_0(M)f=g,\quad f\in\mathscr{D}(T_0(M)).$$

下面将证明最小算子 $T_0(M)$ 也是微分算子, 并得出一个微分算子论里重要的关系

$$T_0(M)^*=T_1(M^+).$$

由此可得

$$T_0(M^+)^*=T_1(M).$$

引理 1.1.5 设 M 是 I 上的 n 阶正则微分算式, $f\in\mathscr{D}(T_0(M))$, 则

(1) 当 $I=[a,b]$ 时, $D^kf(a)=D^kf(b)=0,k=0,1,\cdots,n-1$;

(2) 当 $I=[a,\infty)$ 时, $D^kf(a)=0,k=0,1,\cdots,n-1$.

证明 $f\in\mathscr{D}(T_0(M))$, 所以存在 $\{f_m\}\subset C_0^\infty(a,b)$, 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}f_m=f$, $\lim\limits_{m\to\infty}Mf_m=g$. 由于 $f_m(x)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases}My=Mf_m,\\ D^ky(a)=0,\quad k=0,1,\cdots,n-1\end{cases}$$

的解, 如果设 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是 $My=0$ 的一个基本解组, $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是对应的 Wronski 矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x)\\ D\varphi_1(x) & D\varphi_2(x) & \cdots & D\varphi_n(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ D^{n-1}\varphi_1(x) & D^{n-1}\varphi_2(x) & \cdots & D^{n-1}\varphi_n(x)\end{pmatrix},$$

利用常数变易法可得

$$\begin{pmatrix}f_m(x)\\ Df_m(x)\\ \vdots\\ D^{n-1}f_m(x)\end{pmatrix}=\int_a^x \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ \dfrac{Mf_m(t)}{a_n(t)}\end{pmatrix}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\left|D^kf_l(x)-D^kf_m(x)\right|=\left|\int_a^x\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}D^k\varphi_j(x)W_j\left(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\right)(t)}{W\left(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\right)(t)a_n(t)}\left(Mf_l(t)-Mf_m(t)\right)\mathrm{d}t\right|,$$

其中, $W_j\left(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\right)$ 是以 $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ 换 $W(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ 中的第 j 列得到的行列式, 这样在紧子区间 $[a,a_1]$ 上便有

$$\begin{aligned}\left|D^kf_l(x)-D^kf_m(x)\right| &\leqslant C\int_a^{a_1}|Mf_l(t)-Mf_m(t)|\mathrm{d}t\\ &\leqslant C\sqrt{a_1-a}\,\|Mf_l-Mf_m\|.\end{aligned}$$

这表示 $\left\{D^kf_m(x)\right\}$, $k=0,1,\cdots,n-1$ 在 $[a,a_1]$ 上一致收敛, 于是由逐项微分定理得

$$D^kf(a)=\lim_{m\to\infty}D^kf_m(a)=0,\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

同理, 可证其他情形.

引理给出了 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 中的元素所应当满足的边条件.

引理 1.1.6 设 M 是 $I=[a,b]$ 上的正则微分算式, 则边值问题

$$\begin{cases}My=f, & f\in L^2(I),\\ D^ky(a)=D^ky(b)=0, & k=0,1,\cdots,n-1\end{cases}$$

有解的充要条件是

$$f \in \left(\ker T_1(M^+)\right)^{\perp}.$$

注 从 Hilbert 空间理论熟知的公式

$$\overline{\mathrm{ran} A} \oplus \ker A^* = H$$

来看, 引理 1.1.6 的结论是不难想到的.

证明 $\Rightarrow$ 设边值问题有解, $g \in \ker T_1(M^+)$, 则

$$\begin{aligned}(f,g) = (My,g) &= (y, M^+g) + [y,g]_a^b \\ &= (y, M^+g) = (y,0) = 0.\end{aligned}$$

所以 $f \in (\ker T_1(M^+))^{\perp}$.

$\Leftarrow$ 设 $f \in (\ker T_1(M^+))^{\perp}$, y 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My = f, \\ D^k y(a) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

的解 (由存在唯一定理, 保证了 y 的存在性!), 要证明 $D^k y(b) = 0, k = 0, 1, \cdots, n-1$. 对任何 $z \in \ker T_1(M^+)$, 有

$$(My, z) - (y, M^+z) = [y,z]_a^b,$$

即

$$(f, z) - (y, 0) = [y,z](b),$$

所以

$$0 = \left(\boldsymbol{F}(b) \begin{pmatrix} y(b) \\ Dy(b) \\ \vdots \\ D^{n-1}y(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(b) \\ Dz(b) \\ \vdots \\ D^{n-1}z(b) \end{pmatrix} \right).$$

可是对任何 $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$, Cauchy 问题

$$\begin{cases} M^+ z = 0, \\ D^k z(b) = c_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

都有解, 所以

$$
\boldsymbol{F}(b)\begin{pmatrix} y(b) \\ Dy(b) \\ \vdots \\ D^{n-1}y(b) \end{pmatrix}=0.
$$

而 $\boldsymbol{F}(b)$ 非退化, 故 $D^k y(b)=0, k=0,1,\cdots,n-1$.

引理 1.1.7　设

(1) S 是 Hilbert 空间 H 的稠密子空间;

(2) V 是 H 的闭子空间, 有有限亏数 n(即商空间 H/V 的维数等于 n),

则 $V\cap S$ 在 V 中稠.

证明　(1) $V\cap S$ 是 S 的闭子空间, $\dim S/(V\cap S)=n$.

(i) 由于 $\dim H/V=n$, 所以 H 中任意 $n+1$ 个非零元素 $y_1,\cdots,y_{n+1}$ 必有非平凡的线性组合属于 V.

事实上,

$$
\dim V^{\perp}=\dim V^{\perp}\oplus V/V=\dim H/V=n.
$$

设 $V^{\perp}$ 的基是 $x_1,\cdots,x_n$, 则

$$
\sum_{k=1}^{n+1}a_k\left(y_k,x_j\right)=0,\quad j=1,\cdots,n
$$

对于 $a_k, k=1,\cdots,n+1$ 有非零解, 即非平凡线性组合 $\sum\limits_{k=1}^{n+1}a_k y_k\in V$.

(ii) 记 $S_1=S/V\cap S$, 则 $\dim S_1\leqslant n$.

否则, $\dim S_1>n$, 设 $e_1,\cdots,e_{n+1}\in S$, 它们任何不平凡的线性组合都不属于 $V\cap S$. 可是由 (i), 存在不全为零的 $a_1,\cdots,a_{n+1}$, 使得

$$
\sum_{k=1}^{n+1}a_k e_k\in V.
$$

既然 S 是子空间, 故

$$
\sum_{k=1}^{n+1}a_k e_k\in V\cap S.
$$

矛盾!

(iii) 证 $\dim S_1\geqslant n$. $S=V\cap S+S_1$, 于是 $V+S_1\supset S$, $V+S_1$ 就在 H 中稠, 但由 (ii) 知 $V+S_1$ 只是 V 的有限维扩张, 既然 V 闭, 那么 $V+S_1$ 也是闭的. 于是

$$
V+S_1=H,
$$

所以

$$n = \dim H/V = \dim V + S_1/V \leqslant \dim S_1.$$

综合 (ii), (iii) 得

$$\dim S/V \cap S = n.$$

(2) $V \cap S$ 在 V 中稠.

否则, 将存在 $0 \neq x_0 \in V$, 使得 $x_0 \perp V \cap S$. 而 $\dim V^{\perp} = n$, 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $V^{\perp}$ 的正交基, 于是

$$x_0, x_1, \cdots, x_n \perp V \cap S.$$

设 $S_1 = S/V \cap S$ 的基是 $z_1, \cdots, z_n$, 则方程组

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_k, z_j\right) = 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

关于 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 应有非零解, 即有不全为 0 的 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 使得

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k \perp S_1.$$

因为 $0 \neq x_0 \in V$, 而 $x_1, \cdots, x_n \in V^{\perp}$, 故 $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x_k \neq 0$. 又因为 $x_0, x_1, \cdots, x_n \perp V \cap S$, 故

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k \perp V \cap S + S_1 = S.$$

与 S 稠矛盾!

注 M, N 是 X 的闭子空间, $\dim N < \infty$, 则 $M + N$ 闭.

事实上, 定义

$$\sigma : X \to X/M, \quad \sigma(x) = [x],$$

则

$$\|\sigma(x)\| = \|[x]\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \leqslant \|x\|,$$

σ 连续. 而 $\sigma(N)$ 是有限维的, 因而是闭的, 所以 $M + N = \sigma^{-1}(\sigma(N))$ 是闭的!

引理 1.1.8 设 M 是 $I = [a, b]$ 上的 n 阶正则微分算式, 则

$$\mathscr{D}(T_0(M)) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) | D^k f(a) = D^k f(b) = 0, k = 0, 1, \cdots, n-1\},$$

$$T_0(M) = T_1(M)|_{\mathscr{D}(T_0(M))}.$$

注 由此可知, $T_0(M)$ 是微分算子, $T_0(M)f = Mf, f \in \mathscr{D}(T_0(M))$.

证明 (1) $T_0(M) \subset T_1(M)|_{\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))|D^kf(a)=D^kf(b)=0,k=0,1,\cdots,n-1\}}$，所以 $T_0(M)$ 是微分算子.

设 $f\in\mathscr{D}(T_0(M))$, 则存在 $\{f_m\}\subset C_0^\infty(a,b)$, 使得 $\lim\limits_{m\to\infty} f_m=f$, $\lim\limits_{m\to\infty} Mf_m=g$. 由引理 1.1.5 的证明, $\{D^kf_m(x)\}$ 在 $I=[a,b]$ 上一致收敛到 $D^kf(x), k=0,1,\cdots,n-1$. 因为

$$D^nf_m(x)=\frac{1}{a_n(x)}\left(Mf_m(x)-\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x)D^kf_m(x)\right),$$

所以

$$\lim_{m\to\infty} D^nf_m=h\in L^2[a,b].$$

于是 $h\in L[a,b]$. 由于

$$D^{n-1}f_m(x)=\int_a^x D^nf_m(t)\mathrm{d}t$$

的左边一致收敛到 $D^{n-1}f(x)$, 从而右边一致收敛到 $\int_a^x h(t)\mathrm{d}t$, 故

$$D^{n-1}f(x)=\int_a^x h(t)\mathrm{d}t,$$

即 $D^{n-1}f\in AC[a,b]$ 且 $D^nf(x)=h(x)$ 几乎处处成立. 因为平均收敛必含几乎处处收敛的子列, 所以 $D^nf(x)=\dfrac{1}{a_n(x)}\left(g(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k(x)D^kf(x)\right)$ 几乎处处成立, 即 $Mf=g\in L^2[a,b]$. 这表示 $f\in\mathscr{D}(T_1(M))$. 再用引理 1.1.5, 知

$$T_0(M)\subset T_1(M)|_{\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))|D^kf(a)=D^kf(b)=0,k=0,1,\cdots,n-1\}}.$$

(2) $T_1(M)|_{\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))|D^kf(a)=D^kf(b)=0,k=0,1,\cdots,n-1\}}\subset T_0(M)$

只要证明 $\mathscr{D}(T_0(M))\supset\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))|D^kf(a)=D^kf(b)=0,\ k=0,1,\cdots,n-1\}$ 即可.

(i) 特殊情形 $M=D^n$.

设 $u\in\mathscr{D}(T_1(M))$, $D^ku(a)=D^ku(b)=0$, $k=0,1,\cdots,n-1$, 要找 $\{f_m\}\subset C_0^\infty(a,b)$, 使得

$$\lim_{m\to\infty} f_m=u,\quad \lim_{m\to\infty} D^nf_m=v=T_1(M)u=Mu,$$

因而 $u\in\mathscr{D}(T_0(M))$. 记 $T_0=T_1(M)|_{\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))|D^kf(a)=D^kf(b)=0,k=0,1,\cdots,n-1\}}$, 引理 1.1.6 可改写成

$$\mathrm{ran}T_0=(\ker T_1(M^+))^\perp,$$

所以 $\mathrm{ran}T_0$ 是闭子空间. 因为 $\ker T_1(M^+)$ 是有限维的, 所以 $\mathrm{ran}T_0$ 有有限亏数. 又 $C_0^\infty(a,b)$ 在 $L^2(a,b)$ 中稠, 故由引理 1.1.7 知 $\mathrm{ran}T_0\cap C_0^\infty(a,b)$ 在 $\mathrm{ran}T_0$ 中稠. 因为

$$v = Mu = T_0 u \in \mathrm{ran} T_0,$$

所以存在 $\{g_m\} \subset \mathrm{ran}T_0 \cap C_0^\infty(a,b)$, 使得

$$\lim_{m\to\infty} g_m = v.$$

设 $g_m = T_0 f_m$, 要证明 $\{f_m\} \subset C_0^\infty(a,b)$ 且 $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = u$. 因为

$$g_m \in C_0^\infty(a,b), \quad g_m = D^n f_m,$$

所以 $f_m \in C^\infty(a,b)$,

$$D^{n-1} f_m(x) = \int_a^x g_m(t)\mathrm{d}t.$$

如果

$$\mathrm{supp} g_m \subset [a_1, b_1] \subset (a,b),$$

则 $a \leqslant x \leqslant a_1$ 时, $D^{n-1} f_m(x) = 0$; $b_1 \leqslant x \leqslant b$时,

$$D^{n-1} f_m(x) = \int_a^b g_m(t)\mathrm{d}t = D^{n-1} f_m(b) = 0, \quad f_m \in \mathscr{D}(T_0).$$

这样便得

$$\mathrm{supp} D^{n-1} f_m \subset [a_1, b_1] \subset (a,b).$$

通过逐次积分便知

$$\mathrm{supp} f_m \subset [a_1, b_1] \subset (a,b).$$

另外,

$$\begin{aligned}
|D^{n-1} f_m(x) - D^{n-1} u(x)| &= \left| \int_a^x D^n f_m(t)\mathrm{d}t - \int_a^x D^n u(t)\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_a^x g_m(t)\mathrm{d}t - \int_a^x v(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^x |g_m(t) - v(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_a^b |g_m(t) - v(t)|\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{b-a}\|g_m - v\|,
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{m\to\infty} D^{n-1} f_m(x) = D^{n-1} u(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致成立. 类似地可以证明

$$\lim_{m\to\infty} D^k f_m(x) = D^k u(x), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

都在 $[a,b]$ 上一致成立. 特别地, 由 $k = 0$ 知

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = u(x).$$

于是 $\lim_{m\to\infty} f_m = u$.

(ii) 一般情形.

设 $f \in \mathscr{D}(T_0)$ (这里的 T_0 依旧是上一步的 T_0), 则 $D^{n-1}f \in AC[a,b], Mf \in L^2[a,b]$. 于是

$$D^n f = \frac{1}{a_n}\left(Mf - \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k f\right) \in L^2[a,b],$$

因此

$$f \in \mathscr{D}(T_1(D^n)).$$

注意到

$$D^k f(a) = D^k f(b) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

由 (1) 得 $f \in \mathscr{D}(T_0(D^n))$, 因而存在 $\{f_m\} \subset C_0^\infty(a,b)$, 使得

$$\lim_{m\to\infty} D^k f_m(x) = D^k f(x), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

在 $[a,b]$ 上一致成立,

$$\lim_{m\to\infty} D^n f_m = D^n f$$

按 $L^2[a,b]$ 收敛, 由于 a_k 在 $[a,b]$ 上连续, 故

$$\lim_{m\to\infty} Mf_m = Mf,$$

$f \in \mathscr{D}(T_0(M))$.

综合引理 1.1.6 与引理 1.1.8 可得

推论 1.1.3　设 M 是 $I = [a,b]$ 上的 n 阶正则微分算式, 则

$$\operatorname{ran} T_0(M) \oplus \ker T_1(M^+) = L^2[a,b].$$

可见, 闭区间上正则微分算式生成的最小算子有闭值域.

定理 1.1.4　设 M 是 $I = [a,b]$ 上的 n 阶正则微分算式, 则

$$T_0(M)^* = T_1(M^+).$$

证明　(1) $T_0(M)^* \supset T_1(M^+)$.

设 $g \in \mathscr{D}(T_1(M^+))$, 对任何 $f \in \mathscr{D}(T_0(M))$, 因为

$$D^k f(a) = D^k f(b) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

所以由 Green 公式,

$$(Mf, g) - (f, M^+ g) = [f, g]_a^b = 0,$$

即

$$(T_0(M)f,g)=(f,M^+g),$$

所以

$$g\in\mathscr{D}(T_0(M)^*),\quad T_0(M)^*g=M^+g=T_1(M^+)g.$$

(2) $T_0(M)^*\subset T_1(M^+)$.

只需证明 $\mathscr{D}(T_0(M)^*)\subset\mathscr{D}(T_1(M^+))$ 即可.

(i) $\mathrm{ran}T_1(M^+)=L^2(I)$.

设 $f\in L^2(I)$, 由于 I 紧, 所以 $f\in L(I)$, 根据存在唯一性定理, 对任何 $\begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathbf{C}^n$, Cauchy 问题

$$\begin{cases} M^+y=f,\\ D^ky(a)=c_k,\quad k=0,1,\cdots,n-1\end{cases}$$

有唯一解, 所以 $\mathrm{ran}T_1(M^+)=L^2(I)$.

(ii) $\mathscr{D}(T_0(M)^*)\subset\mathscr{D}(T_1(M^+))$.

设 $f\in\mathscr{D}(T_0(M)^*)$, 由 (i) 知存在 $g\in\mathscr{D}(T_1(M^+))$, 使得

$$T_1(M^+)g=T_0(M)^*f.$$

但 $T_1(M^+)\subset T_0(M)^*$, 故

$$T_0(M)^*(f-g)=0.$$

这样对任何 $u\in\mathscr{D}(T_0(M))$, 便有

$$(T_0(M)u,f-g)=(u,T_0(M)^*(f-g))=0$$

即 $(f-g)\perp\mathrm{ran}T_0(M)$, 由推论 1.1.3 知 $(f-g)\in\ker T_1(M^+)$, 而 $g\in\mathscr{D}(T_1(M^+))$, 故 $f\in\mathscr{D}(T_1(M^+))$.

下面考虑一般的区间.

定理 1.1.5 设 M 是 I 上的正则微分算式, 则

$$T_0(M)^*=T_1(M^+).$$

证明 (1) $T_0(M)^*\supset T_1(M^+)$.

设 $g\in\mathscr{D}(T_1(M^+))$, 对任何 $f\in C_0^\infty(\mathring{I})$, 由 Green 公式有

$$(Mf,g)=(f,M^+g),$$

即

$$(T_0(M)f, g) = (f, T_1(M^+)g).$$

取极限知这个等式对一切 $f \in \mathscr{D}(T_0(M))$ 都成立, 所以

$$g \in \mathscr{D}(T_0(M)^*), \quad T_0(M)^*g = T_1(M^+)g.$$

(2) $T_0(M)^* \subset T_1(M^+)$

只需证明 $\mathscr{D}(T_0(M)^*) \subset \mathscr{D}(T_1(M^+))$ 即可. 设 $g \in \mathscr{D}(T_0(M)^*)$, $[\alpha, \beta]$ 是 I 的任意紧子区间. 对任意的 $f \in C_0^\infty(\alpha, \beta) \subset C_0^\infty(\mathring{I})$, 有

$$(T_0(M)f, g) = (f, T_0(M)^*g),$$

即

$$(Mf, g) = (f, T_0(M)^*g).$$

记 $(\cdot,\cdot)_1$ 是 $L^2[\alpha, \beta]$ 的内积, $g_1 = g\big|_{[\alpha,\beta]}$, $(T_0(M)^*g)_1 = T_0(M)^*g\big|_{[\alpha,\beta]}$, $M_1 = M\big|_{[\alpha,\beta]}$, 则

$$(M_1f, g_1)_1 = (f, (T_0(M)^*g)_1)_1, \quad f \in C_0^\infty(\alpha, \beta).$$

取极限, 上面这个等式就对一切 $f \in \mathscr{D}(T_0(M_1))$ 都成立, 所以

$$g_1 \in \mathscr{D}(T_0(M_1)^*), \quad T_0(M_1)^*g_1 = (T_0(M)^*g)_1,$$

可是

$$\mathscr{D}(T_0(M_1)^*) = \mathscr{D}(T_1((M_1)^+)) = \mathscr{D}(T_1((M^+)_1)),$$

其中, $(M^+)_1 = M^+|_{[\alpha,\beta]}$. 于是

$$D^{n-1}g_1 \in AC[\alpha, \beta],$$

$$(M^+)_1 g_1 = (M^+g)_1 = (T_0(M)^*g)_1.$$

由于 $[\alpha, \beta]$ 是任意的, 故得

$$D^{n-1}g \in AC_{\mathrm{loc}}(I),$$

$$M^+g = T_0(M)^*g \in L^2(I).$$

这样便有 $g \in \mathscr{D}(T_1(M^+))$.

推论 1.1.4　设 M 是 I 上的正则微分算式, 则

(1) $T_1(M)$ 是闭算子;

(2) $T_0(M) \subset T_1(M)$ (所以 $T_0(M)$ 也是微分算子, $T_0(M)f = Mf$).

证明 因为

$$T_1(M) = T_1(M^{++}) = T_0(M^+)^*,$$

所以, $T_1(M)$ 是闭算子. 因为

$$T_1(M)|_{C_0^\infty(\mathring{I})} \subset T_1(M),$$

所以 $T_0(M) = \overline{T_1(M)|_{C_0^\infty(\mathring{I})}} \subset T_1(M)$.

对于 $I = [a, \infty)$ 情形, 有如下推论:

推论 1.1.5 如果 M 为 $[a,\infty)$ 上的正则微分算式, 则 $f \in \mathscr{D}(T_0(M)) \Leftrightarrow f \in \mathscr{D}(T_1(M))$ 而 $D^k f(a) = 0, k = 0, 1, \cdots, n-1$ 且对任何 $g \in \mathscr{D}(T_1(M^+))$ 有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f,g](x) = 0$.

证明 $f \in \mathscr{D}(T_1(M)), g \in \mathscr{D}(T_1(M^+))$,

$$0 \equiv (Mf, g) - (f, M^+g) = \lim_{x\to\infty}[f,g]_a^x = \lim_{x\to\infty}[f,g](x).$$

1.2 微分算子的亏指数

已经知道 Hilbert 空间里对称算子的亏指数的概念. 由 von Neumann 分解公式

$$\mathscr{D}(A^*) = \mathscr{D}(\bar{A}) \dot{+} K_+ \dot{+} K_-,$$

其中,

$$K_+ = \ker(A^* - \mathrm{i}I), \quad K_- = \ker(A^* + \mathrm{i}I)$$

是 A 的两个亏子空间, 它们的维数乃是 A 的亏指数 (d_+, d_-).

现在把亏指数的概念推广到一般的非对称微分算子的情形.

定义 1.2.1 设 M 是 I 上的正则微分算式, 称

$$d(M) = \frac{1}{2}\dim \mathscr{D}(T_1(M))/\mathscr{D}(T_0(M))$$

为 M 的亏指数 (或 $T_0(M)$ 的亏指数) .

当 M 对称时, $M^+ = M$, $T_0(M)^* = T_1(M^+) = T_1(M)$, 所以由 von Neumann 公式可得

$$d(M) = \frac{1}{2}(d_+ + d_-).$$

但是实对称正则微分算式的两个亏指数是相等的, 所以 $d(M) = d_+ = d_-$, 因此新定义的亏指数与原来的亏指数概念一致.

引理 1.2.1 设 M 是 $[a,\infty)$ 上的正则微分算式, 则 $T_1(M)$ 的值域在 $L^2[a,\infty)$ 中稠.

证明　因为

$$\overline{\mathrm{ran}T_1(M)} \oplus \ker T_1(M)^* = L^2[a,\infty),$$

所以

$$\overline{\mathrm{ran}T_1(M)} \oplus \ker T_0(M^+) = L^2[a,\infty).$$

如果 $f \in \ker T_0(M^+)$, 则由 Cauchy 问题的存在唯一性知

$$\begin{cases} M^+ f = 0, \\ D^k f(a) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1, \end{cases}$$

$f = 0$, 所以 $\mathrm{ran}T_1(M)$ 在 $L^2[a,\infty)$ 中稠.

注　从证明可以看出最小算子是单射, 因而逆算子存在.

引理 1.2.2　设 M 是 $[a,\infty)$ 上的 n 阶正则微分算式, 则

$$2d(M) \geqslant \mathrm{nullity}T_1(M^+) + \mathrm{nullity}(T_1(M)),$$

其中, $\mathrm{nullity}T_1(M) = \dim\ker T_1(M)$, 即 $My = 0$ 线性无关的平方可积解的个数.

证明　设 $\mathrm{nullity}T_1(M^+) = k$, 由于

$$2d(M) = \dim \mathscr{D}(T_1(M))/\mathscr{D}(T_0(M)),$$

$$\mathscr{D}(T_0(M)) \cap \ker T_1(M) = \{0\},$$

因此

$$\mathscr{D}(T_1(M)) = \mathscr{D}(T_0(M)) \dotplus \ker T_1(M) \dotplus \mathscr{D}(T_1(M))/\big(\mathscr{D}(T_0(M)) \dotplus \ker(T_1(M))\big),$$

所以要证明

$$\dim \mathscr{D}(T_1(M))/\big(\mathscr{D}(T_0(M)) \dotplus \ker T_1(M)\big) \geqslant k.$$

对任意的 $g \in \mathscr{D}(T_1(M))$, 把它分解成

$$g = g_1 + g_2 + g_3,$$

其中,

$$g_1 \in \mathscr{D}(T_1(M))/\big(\mathscr{D}(T_0(M)) \dotplus \ker T_1(M)\big), \quad g_2 \in \mathscr{D}(T_0(M)), \quad g_3 \in \ker T_1(M),$$

则

$$\begin{aligned} T_1(M)g &= T_1(M)g_1 + T_1(M)g_2 = T_1(M)g_1 + T_0(M)g_2, \\ T_1(M)g_1 &= T_1(M)g - T_0(M)g_2. \end{aligned}$$

于是

$$\{T_1(M)g_1|g_1\in\mathscr{D}(T_1(M))/(\mathscr{D}(T_0(M))\dot{+}\ker T_1(M))\}=\mathrm{ran}T_1(M)/\mathrm{ran}T_0(M).$$

可是

$$\overline{\mathrm{ran}T_0(M)}\oplus\ker T_1(M^+)=L^2[a,\infty),$$

即 $\overline{\mathrm{ran}T_0(M)}$ 是具有有限亏数 k 的闭子空间. 由于 $\mathrm{ran}T_1(M)$ 稠, 根据引理 1.1.7 的证明,

$$\dim\mathrm{ran}T_1(M)/(\overline{\mathrm{ran}T_0(M)}\cap\mathrm{ran}T_1(M))=k.$$

显然

$$\mathrm{ran}T_1(M)\cap\overline{\mathrm{ran}T_0(M)}\supset\mathrm{ran}T_1(M)\cap\mathrm{ran}T_0(M)=\mathrm{ran}T_0(M).$$

故由

$$\begin{aligned}&\{T_1(M)g_1\,|g_1\in\mathscr{D}(T_1(M))/(\mathscr{D}(T_0(M))\dot{+}\ker T_1(M))\}\\&=\mathrm{ran}T_1(M)/\mathrm{ran}T_0(M)\supset\mathrm{ran}T_1(M)/(\mathrm{ran}T_1(M)\cap\overline{\mathrm{ran}T_0(M)})\end{aligned}$$

知 $\dim\mathscr{D}(T_1(M))/\mathscr{D}(T_0(M))\dot{+}\ker T_1(M)\geqslant k$.

注 对于 $I=[a,b]$, 结论亦真.

引理 1.2.3 设 M 是 I ($[a,b]$ 或 $[a,\infty)$) 上的正则微分算式, 则下列三条等价:

(1) $T_0(M)$ 有闭值域;

(2) $\mathrm{ran}T_1(M)=L^2(I)$;

(3) $T_0(M^+)$ 有闭值域.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由于

$$\mathrm{ran}T_0(M)\oplus\ker T_1(M^+)=L^2(I),$$

而 $\ker T_1(M^+)$ 是有限维的, 于是 $\mathrm{ran}T_1(M)$ 是 $\mathrm{ran}T_0(M)$ 的有限维扩张, 因而也是闭的. 可是 $\mathrm{ran}T_1(M)$ 稠, 故 $\mathrm{ran}T_1(M)=L^2(I)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $\mathrm{ran}T_1(M)$ 闭, 由闭值域定理 (Yosida, 《Functional Analysis》, p.205), 它的共轭算子 $T_1(M)^*=T_0(M^+)^{**}=T_0(M^+)$ 有闭值域.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\mathrm{ran}T_0(M^+)$ 闭, 故 $\mathrm{ran}T_1(M^+)=L^2(I)$ 是闭的, 由闭值域定理 $T_0(M)=T_1(M^+)^*$ 有闭值域.

定理 1.2.1 设 M 是 $[a,\infty)$ 上的正则微分算式, $T_0(M)$ 有闭值域, 则

$$2d(M)=\mathrm{nullity}T_1(M^+)+\mathrm{nullity}T_1(M).$$

证明 由于 $2d(M)=\dim\mathscr{D}(T_1(M))/\mathscr{D}(T_0(M))$, 所以应当考虑最小算子 $T_0(M)$ 是怎样通过定义域的扩充而变成最大算子 $T_1(M)$ 的. 首先, 当然是把零空间 $\ker T_1(M)$ 的基元素添加进来, 由存在唯一定理, $\ker T_1(M)\cap\mathscr{D}(T_0(M))=\{0\}$, 所以这

些元素并不在 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 中. 但是把它们添加进来以后算子的值域并没有增加新元素, 仍然是 $\mathrm{ran}T_0(M)$. 由于 $\mathrm{ran}T_0(M)$ 闭, 由引理 1.2.3, $\mathrm{ran}T_1(M)=L^2[a,\infty)$. 由于

$$L^2[a,\infty)=\mathrm{ran}T_0(M)\oplus\ker T_1(M^+),$$

所以, 再扩充时必须得让 $\ker T_1(M^+)$ 的基元素 $\{g_1,\cdots,g_m\}$ 都出现在扩充了的算子值域中. 因为 $\mathrm{ran}T_1(M)=L^2[a,\infty)$, 所以存在 $f_j\in\mathscr{D}(T_1(M))$, 使得

$$T_1(M)f_j=g_j,\quad j=1,\cdots,m.$$

由于 $\{g_1,\cdots,g_m\}$ 线性无关, $\{f_1,\cdots,f_m\}$ 也必然线性无关, 而且它们显然不能在 $\mathscr{D}(T_0(M))\dot{+}\ker T_1(M)$ 中, 把这些 f_j 添加进来便可使得算子的值域是全空间. 所以以下要证明

$$\mathscr{D}(T_1(M))/\mathscr{D}(T_0(M))=\ker T_1(M)\dot{+}\mathrm{span}\,\{f_1,\cdots,f_m\}.$$

因为对任意的 $f\in\mathscr{D}(T_1(M))$,

$$Mf=u+v,\quad u\in\mathrm{ran}T_0(M),\quad v\in\ker T_1(M^+).$$

所以存在 $g\in\mathscr{D}(T_0(M))$ 使得 $u=Mg$, 而 $v=\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_jg_j$, 从而

$$Mf=Mg+\sum_{j=1}^{m}\alpha_jg_j=Mg+\sum_{j=1}^{m}\alpha_jMf_j.$$

于是

$$M\left(f-g-\sum_{j=1}^{m}\alpha_jf_j\right)=0,\quad f-g-\sum_{j=1}^{m}\alpha_jf_j\in\ker T_1(M),$$

即

$$f=g+\left(f-g-\sum_{j=1}^{m}\alpha_jf_j\right)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_jf_j,$$

其中, 右边第 1 项在 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 中, 第 2 项在 $\ker T_1(M)$ 中, 第 3 项在 $\mathrm{span}\{f_1,\cdots,f_m\}$ 中, 故

$$2d(M)=\mathrm{nullity}T_1(M^+)+\mathrm{nullity}T_1(M).$$

注　对 $I=[a,b]$, 结论亦真.

推论 1.2.1　设 M 是 $[a,b]$ 上的正则微分算式, 则 $d(M)=M$ 的阶数.

定理 1.2.2 设 M 是 $[a,\infty)$ 上的正则微分算式, f 是 $[a,\infty)$ 上的有界复值可测函数, 则 $d(M+f)=d(M)$.

证明 $\mathscr{D}(T_1(M+f))=\mathscr{D}(T_1(M))$, 如果 $\{f_n\}\subset C_0^\infty(a,\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=h$, $\{Mf_n\}$ 是 Cauchy 列的充要条件是 $\{(M+f)f_n\}$ 是 Cauchy 列, 因此

$$\mathscr{D}(T_0(M+f))=\mathscr{D}(T_0(M)).$$

故 $d(M+f)=d(M)$.

定理 1.2.3 设 M 是 $[a,\infty)$ 上的 n 阶正则微分算式, 则 $d(M)\geqslant\dfrac{n}{2}$.

证明 对每个 $j=1,\cdots,n$, 取一个 n 阶多项式 p_j, 使得

$$D^{k-1}p_j(a)=\delta_{jk},\quad k=1,\cdots,n,$$

以该多项式的 $n+1$ 个系数作为未知数, 方程只有 n 个, 所以总有解, 这样的 p_j 总存在. 令

$$f_j=hp_j,\quad j=1,\cdots,n,$$

其中, h 是引理 1.1.4 中的 C_0^∞ 函数, 在 a 点及其附近取值为 1, 则 $f_j\in\mathscr{D}(T_1(M))/\mathscr{D}(T_0(M))$($\mathscr{D}(T_0(M))$ 中函数 f 要满足 $f(a)=\cdots=D^{n-1}f(a)=0$) 且 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关, 所以

$$d(M)\geqslant\frac{n}{2}.$$

定义 1.2.2 设 M 是 $[a,\infty)$ 上的 n 阶正则微分算式, 如果 $d(M)=\dfrac{n}{2}$, 则称 M 属于极限点情形.

这一名称来自 Weyl 对实的二阶 Sturm-Liouville 微分算子

$$M=-DpD+q$$

的研究, 他证明了 M 可以分成两类 (见 3.2 节), 考虑对称算子 $T_0(M)$,

(1) $T_0(M)$ 的亏指数为 (1, 1)—— 极限点型;

(2) $T_0(M)$ 的亏指数为 (2, 2)—— 极限圆型.

下面给出几个判别微分算式为极限点的准则.

定理 1.2.4 设 M 是 $[a,\infty)$ 上的 n 阶正则微分算式, $T_0(M)$ 有闭值域, 则 M 属于极限点情形的充分必要条件是

$$\text{nullity}T_1(M^+)+\text{nullity}T_1(M)=n.$$

这是定理 1.2.1 的自然结论.

推论 1.2.2 设 M 是 $[a,\infty)$ 上的 $2n$ 阶实对称正则微分算式, $T_0(M)$ 有闭值域, 如果对任何 $f,g\in\ker T_1(M)$ 都有

$$\lim_{x\to\infty}[f,g](x)=0,$$

则 M 是极限点的.

证明　要证明 $\text{nullity}T_1(M)=n$. 记 $\text{nullity}T_1(M)=m$, 对任何 $f,g\in\ker T_1(M)$, 由 Green 公式和条件知

$$[f,g](a)=0.$$

由 Cauchy 问题解的存在唯一定理, $My=0$ 的解空间与 $\mathbf{C}^{2n}$ 同构, 同构对应就是

$$\sigma f=\begin{pmatrix} f(a)\\ Df(a)\\ \vdots\\ D^{2n-1}f(a)\end{pmatrix},$$

而等式

$$0=[f,g](a)=(\boldsymbol{F}(a)\sigma f,\sigma g),\quad f,g\in\ker T_1(M)$$

则表示 $\mathbf{C}^{2n}$ 的两个子空间 $\{\boldsymbol{F}(a)\sigma f|f\in\ker T_1(M)\}$, $\{\sigma g|g\in\ker T_1(M)\}$ 是正交的, 由于 $\boldsymbol{F}(a)$ 非退化, 它们的维数都是 m, 故 $m\leqslant n$. 可是由定理 1.2.1 和定理 1.2.3, 又应有

$$m=\text{nullity}T_1(M)=d(M)\geqslant n.$$

引理 1.2.4　设 M 是 $[a,\infty)$ 上属于极限点情形的正则微分算式, 则对任何 $f\in\mathscr{D}(T_1(M))$ 都存在 $g\in\mathscr{D}(T_0(M))$, 使得 $f-g\in C^\infty$ 且 $\text{supp}(f-g)$ 紧.

证明　因为 $2d(M)=n$, 所以定理 1.2.3 证明中的那些 $f_1,\cdots,f_n$ 组成了 $\mathscr{D}(T_1(M))/\mathscr{D}(T_0(M))$ 的一个基, 于是任何 $f\in\mathscr{D}(T_1(M))$ 都可以表示成

$$f=g+\sum_{k=1}^n\alpha_kf_k,$$

其中, $g\in\mathscr{D}(T_0(M))$, 而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是一些常数, 显然

$$f-g=\sum_{k=1}^n\alpha_kf_k\in C^\infty$$

且 $\text{supp}(f-g)$ 紧.

这样, 函数 $f\in\mathscr{D}(T_1(M))$ 在无穷远处的性态便由 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 中某个函数在无穷远处的性态决定!

定理 1.2.5　设 M 是 $[a,\infty)$ 上的正则微分算式, 则 M 属于极限点情形的充分且必要条件是对任意的 $f\in\mathscr{D}(T_1(M))$, $g\in\mathscr{D}(T_1(M^+))$ 都有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f,g](x)=0$.

证明 $\Rightarrow$ 由引理 1.2.4, 不妨假设 $f\in\mathscr{D}(T_0(M))$, 因为 $T_1(M^+)=T_0(M)^*$, 所以

$$(T_0(M)f,g)=(f,T_1(M^+)g),$$

即

$$(Mf,g)=(f,M^+g).$$

由 Green 公式,

$$\int_a^x Mf(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\overline{M^+g(t)}\mathrm{d}t=[f,g]_a^x=[f,g](x),$$

取极限得

$$\lim_{x\to\infty}[f,g](x)=(Mf,g)-(f,M^+g)=0.$$

$\Leftarrow$ (1) 令 T 表示 $T_1(M)$ 在集合

$$\left\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,\middle|\,D^kf(a)=0,k=0,1,\cdots,n-1\right\}$$

上的限制, 则 T 是闭线性算子.

事实上, 设 $\{f_n\}\subset\mathscr{D}(T)$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$, $\lim\limits_{n\to\infty}Tf_n=h$. 因为 $T_1(M)$ 是闭线性算子, 所以 $f\in\mathscr{D}(T_1(M)), h=Mf$. 为了得到 T 是闭的, 只要证明 $D^kf(a)=0,k=0,1,\cdots,n-1$. 由于 $T_1(M)$ 闭, 在 $\mathscr{D}(T_1(M))$ 上定义新内积

$$(f,g)_1=(f,g)+(Mf,Mg),$$

则 $(\mathscr{D}(T_1((M)),(\cdot,\cdot)_1)$ 是个 Hilbert 空间. 考虑它上面的另一个模

$$\|f\|_2=\|f\|_1+\sum_{k=0}^{n-1}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|D^kf(x)|,$$

其中, $b>a$. 不难证明 $(\mathscr{D}(T_1(M)),\|\cdot\|_2)$ 是一个 Banach 空间. 因为 $\|f\|_1\leqslant\|f\|_2$, 由逆算子定理, $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价. 显然 $D^kf(a),k=0,1,\cdots,n-1$ 都是 $(\mathscr{D}(T_1(M)),\|\cdot\|_2)$ 上的连续线性泛函, 所以它们也是 $(\mathscr{D}(T_1(M)),\|\cdot\|_1)$ 上的连续线性泛函. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_1=0$, 便得 $D^kf(a)=\lim\limits_{n\to\infty}D^kf_n(a)=0,k=0,1,\cdots,n-1$.

(2) $T=T_0(M)$(极限点情形时最小算子定义域的刻画).

显然 $T_0(M)\subset T$, 所以 $T^*\subset T_0(M)^*=T_1(M^+)$. 另外, 如果 $g\in\mathscr{D}(T_1(M^+))$, 对任何的 $f\in\mathscr{D}(T)$, 由 Green 公式,

$$\int_a^x Mf(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\overline{M^+g(t)}\mathrm{d}t=[f,g]_a^x(x),$$

让 $x\to\infty$ 得

$$(Mf, g) = (f, M^+g).$$

这说明 $g \in \mathscr{D}(T^*)$ 且 $T^*g = M^+g$. 因此又有 $T_1(M^+) \subset T^*$. 故 $T^* = T_1(M^+)$. 于是

$$T = \overline{T} = T^{**} = T_1(M^+)^* = T_0(M)^{**} = T_0(M).$$

(3) M 为极限点型.

对任何 $f \in \mathscr{D}(T_1(M))$, 取 $v \in C^\infty$ 使得 $D^k v(a) = D^k f(a), k = 0, 1, \cdots, n-1$, supp$v$ 紧, 则 $v \in \mathscr{D}(T_1(M))$, 而 $f - v \in \mathscr{D}(T_0(M))$, 这表示 $\mathscr{D}(T_1(M))/\mathscr{D}(T_0(M))$ 是由那些 $D^k v(a), k = 0, 1, \cdots, n-1$ 中至少有一个不为零的 v 组成, 显然线性无关的这种 v 有 n 个, 故 $d(M) = \dfrac{1}{2}\dim \mathscr{D}(T_1(M))/\mathscr{D}(T_0(M)) = \dfrac{n}{2}$.

推论 1.2.3　设 $M = P + Q$ 是 $[a, \infty)$ 上的正则微分算式, $T_0(M)$ 有闭值域, P, Q 都是极限点的实对称正则微分算式, 如果对任何 $f \in \ker T_1(M)$ 都有 $Pf, Qf \in L^2[a, \infty)$, 则 M 也是极限点的.

证明　注意到

$$[\cdot, \cdot]_M = [\cdot, \cdot]_P + [\cdot, \cdot]_Q,$$

由推论 1.2.2 和定理 1.2.5 可得.

定理 1.2.6　设 M 是 $[a, \infty)$ 上的正则微分算式, 则 M 属于极限点情形的充分必要条件是任何 $f \in \mathscr{D}(T_1(M))$ 都可以表成一个 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 的元素与一个具紧支集的无穷次可微函数的和.

证明　$\Rightarrow$　即引理 1.2.4.

$\Leftarrow$　对任何的 $f \in \mathscr{D}(T_1(M))$ 和 $g \in \mathscr{D}(T_1(M^+))$, 设

$$f = f_0 + (f - f_0),$$

其中, $f_0 \in \mathscr{D}(T_0(M))$, $(f - f_0) \in C^\infty$ 且 supp$(f - f_0)$ 紧. 于是

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}[f, g](x) &= \lim_{x\to\infty}[f_0 + (f - f_0), g](x) = \lim_{x\to\infty}[f_0, g](x) \\
&= \lim_{x\to\infty}[f_0, g]_a^x = \lim_{x\to\infty}\left(\int_a^x Mf_0(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t - \int_a^x f_0(t)\overline{M^+g(t)}\mathrm{d}t\right) \\
&= (Mf_0, g) - (f_0, M^+g) = (T_0(M)f_0, g) - (f_0, T_1(M^+)g) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

根据定理 1.2.5, M 为极限点型.

从以上这条定理可以看出, 微分算式是否属于极限点情形取决于最小算子定义域中的函数在无穷远处具有什么样的渐近性质.

为什么要对亏指数的判别, 尤其是对算子是否为极限点感兴趣呢? 根据 Hilbert 空间的算子理论知道亏指数的情况与算子是否有自伴延拓, 若有, 自伴延拓如何构造, 有直接的关系. 而自伴性则与微分方程定解问题是否适定是等价的. M. Reed 和 B. Simon 在*Methods of Modern Mathematical Physics* Vol.2 里写道: "The existence of solutions of the basic dynamics equations in quantum mechanics and quantum field theory is equivalent to proving that the Hamiltonian is self-adjoint."(Chap.10 读者指南) 该书给出了许多具体例子的讨论. 这里只看到了实对称常微分算子的情形, 至于非对称的某些特殊类型常微分算子也有相应的结果, 但是对一般的常微分算子亏指数与适定性的关系尚未见有人讨论.

假设 M 是 $[a,\infty)$ 上实对称的 $2n$ 阶正则微分算式

$$M=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^k p_k(x) D^k,$$

其中, $p_k(x),\quad k=0,1,\cdots,n$ 都是非负的 C^∞ 函数, $p_n(x)>0, p_0(x)\geqslant\varepsilon>0$. M 的亏指数与下述的微分方程 "两点" 边值问题的适定性有密切的关系:

$$\begin{cases} Mf=g, & g\in L^2[a,\infty), \\ D^k f(a)=0, & k=0,1,\cdots,n-1, \\ f\in L^2[a,\infty). \end{cases} \tag{P}$$

令

$$S=\left\{\left.\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_{2n}\end{pmatrix}\right| a_1=\cdots=a_n=0\right\},$$

这是 $\mathbf{C}^{2n}$ 的 n 维子空间. 记

$$\sigma f=\begin{pmatrix} f(a)\\ Df(a)\\ \vdots\\ D^{2n-1}f(a)\end{pmatrix}.$$

问题 (P) 乃是求一解, 它在 a 点与无穷远点取一定的值: 边条件

$$\sigma f\in S,\quad f\in L^2[a,\infty),$$

分别规定 f 在 a 点和无穷远点的状态. 对任何 $f,g\in C^\infty[a,\infty)$, 若 supp$f$, supp$g$ 紧且

$$\sigma f,\sigma g\in S,$$

有

$$(Mf,g)=(f,Mg).$$

事实上, 因为由 Green 公式得

$$(Mf,g)-(f,Mg)=\lim_{x\to\infty}[f,g]_a^x=-[f,g](a).$$

而

$$\boldsymbol{F}(a)\sigma f=\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & * & \\ \vdots & * & & \\ * & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ *\\ \vdots\\ *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ *\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad \sigma g=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ *\\ \vdots\\ *\end{pmatrix},$$

所以

$$[f,g](a)=(\boldsymbol{F}(a)\sigma f,\sigma g)=0.$$

这表明 $T_1(M)$ 限制在集合

$$\mathscr{D}=\{f|f\in C^\infty[a,\infty),\mathrm{supp}f\ 紧,\ \sigma f\in S\}$$

上得到的算子 R 是一个对称线性算子. 不仅如此, R 还是下半有界的. 这是因为当 $f\in\mathscr{D}$ 时,

$$\begin{aligned}(Rf,f)=&\sum_{k=0}^{n}\int_a^\infty(-1)^kD^kp_k(x)D^kf(x)\cdot\overline{f(x)}\mathrm{d}x\\ =&\sum_{k=0}^{n}\int_a^\infty p_k(x)\left|D^kf(x)\right|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_a^\infty p_0(x)|f(x)|^2\mathrm{d}x\\ \geqslant&\varepsilon\|f\|^2.\end{aligned}$$

定理 1.2.7 问题 (P) 的解存在.

证明 设 F_R 是 $\mathbf{R}$ 的 Friedrichs 延拓, 它有以下两条性质:

(1) $(F_Rf,f)\geqslant\varepsilon\|f\|^2$, $f\in\mathscr{D}(F_R)$;

(2) $\mathrm{ran}F_R=L^2[a,\infty)$, F_R^{-1} 存在且为 $L^2[a,\infty)$ 上的有界线性算子.

因为

$$\|F_Rf\|\,\|f\|\geqslant\varepsilon\|f\|^2,\quad \|F_Rf\|\geqslant\varepsilon\|f\|,$$

所以

$$\|F_R^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}.$$

为了求问题 (P) 的解 f, 只要取 $f=F_R^{-1}g$ 即可, 但是 F_R 是否为微分算子, 因而 $F_Rf=Mf$? 另外, f 是否满足边条件 $\sigma f\in S$?

因为

$$T_1(M)\big|_{C_0^\infty(a,\infty)}\subset R,$$

所以

$$R^*\subset\left(T_1(M)\big|_{C_0^\infty(a,\infty)}\right)^*=T_0(M)^*=T_1(M),$$

而 $R\subset F_R$, 故 $F_R\subset R^*\subset T_1(M)$, F_R 是微分算子. 其次, 对任何 $f\in\mathscr{D}(F_R)$ 和任何 $h\in\mathscr{D}(R)$ 都有

$$(F_Rh,f)=(h,F_Rf),$$

即

$$(Mh,f)=(h,Mf).$$

根据 Green 公式,

$$\lim_{x\to\infty}[h,f]_a^x=0.$$

注意到 $h\in\mathscr{D}(R)$, 故

$$0=[h,f](a)=(\boldsymbol{F}(a)\sigma h,\sigma f).$$

当 h 取遍 $\mathscr{D}$ 中点时, 可以让 σh 取遍 S 的向量 (让一个 $2n$ 阶的多项式在 a 点逐级导数取值为 S 中的某向量, 将它在远处截断, 光滑化即得所要的 h) , 而

$$\boldsymbol{F}(a)\sigma h\in S^\perp,$$

因为 $\boldsymbol{F}(a)$ 非退化, $\boldsymbol{F}(a)S$ 也是 n 维子空间. 于是

$$\boldsymbol{F}(a)S=S^\perp,$$

所以 $\sigma f\in S$, 即 F_R 定义域中的函数均满足 a 点的边条件. 综合这两条便知 $f=F_R^{-1}g$ 是问题 (P) 的解.

定理 1.2.8 问题 (P) 适定的充要条件是 M 为极限点型.

证明 $\Rightarrow$ 假若不然, 设 $d(M)=l>n$. 首先证明 $T_0(M)$ 有闭值域.

对任意的 $f\in C_0^\infty(a,\infty)$, 有

$$(Mf,f)=\sum_{k=0}^n\int_a^\infty p_k(x)\left|D^kf(x)\right|^2\mathrm{d}x\geqslant\varepsilon\|f\|^2,$$

通过取极限知道这个不等式对一切 $f\in\mathscr{D}(T_0(M))$ 都成立. 于是由

$$\|Mf\|\,\|f\|\geqslant(Mf,f)\geqslant\varepsilon\|f\|^2,\quad f\in\mathscr{D}(T_0(M)),$$

得

$$\|Mf\| \geqslant \varepsilon\|f\|, \quad f \in \mathscr{D}(T_0(M)).$$

如果序列 $\{Mf_n\} \subset \mathrm{ran}T_0(M)$ 收敛到 g, 则由上面的不等式知 $\{f_n\} \subset \mathscr{D}(T_0(M))$ 是 Cauchy 列, 故有 $f \in L^2[a,\infty)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty} Mf_n = g$$

且 $T_0(M)$ 是闭算子, 必有 $f \in \mathscr{D}(T_0(M))$ 且 $g = T_0(M)f$. 所以 $\mathrm{ran}T_0(M)$ 是闭的. 这样, 由定理 1.2.1

$$d(M) = \mathrm{nullity}T_1(M).$$

于是 $Mf=0$ 便有 l 个线性无关的平方可积解, 记它们为 $f_1,\cdots,f_l$.

设 f 是问题 (P) 的解, 考虑函数

$$f + \sum_{k=1}^{l} \alpha_k f_k,$$

方程组

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_k D^j f_k(a) = 0, \quad j = 0,1,\cdots,n-1$$

必有非零解 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$. 这样 $f + \sum\limits_{k=1}^{l} \alpha_k f_k$ 便是问题 (P) 不同于 f 的另一个解, 矛盾! 结合定理 1.2.3, 有 $l = n$.

$\Leftarrow$　如果问题 (P) 的解不唯一, 则问题

$$\begin{cases} Mf = 0, \\ \sigma f \in S, \\ f \in L^2[a,\infty) \end{cases}$$

就有一个非零解 h. 记 H 为 $T_1(M)$ 在集合

$$\mathscr{D}(H) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M))\,|\sigma f \in S\}$$

上的限制, 则 $Hh = 0$, 即 $0 \in \sigma(H)$, 但

$$(H\varphi,\varphi) \geqslant \varepsilon(\varphi,\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(H),$$

如果 H 自伴, 则 $0 \in \rho(H)$, 这样便出现了矛盾! 问题就变成去证明 H 是自伴的. 显然

$$T_0(M) \subset H,$$

所以

$$H^* \subset T_1(M).$$

于是 H^* 是微分算子. 对任意的 $f, g \in \mathscr{D}(H)$, 利用 Green 公式和定理 1.2.5,

$$\begin{aligned}(Hf, g) - (f, Hg) &= (Mf, g) - (f, Mg) \\ &= \lim_{x\to\infty} \int_a^x \left(Mf(t)\overline{g(t)} - f(t)\overline{Mg(t)} \right) \mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to\infty} [f, g]_a^x = \lim_{x\to\infty} [f, g](x) = 0,\end{aligned}$$

所以 $H \subset H^*$.

如果 $f \in \mathscr{D}(H^*)$, 则对任何 $g \in \mathscr{D}(H)$, 有

$$(Hg, f) = (g, H^* f),$$

即

$$(Mg, f) = (g, Mf),$$

因而由 Green 公式知

$$\lim_{x\to\infty} [g, f]_a^x = 0,$$

但是根据定理 1.2.5, $\lim\limits_{x\to\infty} [g, f](x) = 0$, 因而

$$[g, f](a) = (\boldsymbol{F}(a)\sigma g, \sigma f) = 0, \quad g \in \mathscr{D}(H),$$

即

$$\sigma f \perp S^{\perp},$$

所以 $\sigma f \in S, f \in \mathscr{D}(H)$. 这样便又得到 $H^* \subset H$, 故 H 自伴.

由此可见, 判别一个微分算式是否为极限点是关系到边值问题是否适定的问题.

定理 1.2.9 问题 (P) 适定的充要条件是 R 本质自伴.

注 对偏微分算子人们多半是通过本质自伴性去研究适定性.

证明 $\Rightarrow$ P 适定, 则 M 极限点, 算子 H 定义如定理 1.2.8 所述, 它是自伴的. 下面来证明 $H = \overline{R}$.

(1) $R \subset H$, 因而 $\overline{R} \subset H$;

(2) 为了证明 $H \subset \overline{R}$, 只需证明 $\mathscr{D}(H) \subset \mathscr{D}(\overline{R})$.

设 $f \in \mathscr{D}(H) \subset \mathscr{D}(T_1(M))$, 因为 M 是极限点的, f 可以分解成

$$f = f_1 + f_2,$$

其中, $f_1 \in \mathscr{D}(T_0(M))$, $f_2 \in C^\infty, \mathrm{supp} f_2$ 紧. 由于 $\sigma f \in S$, 而 $\sigma f_1 \in S$, 故 $\sigma f_2 \in S$. 由最小算子 $T_0(M)$ 的定义, 存在 $\{g_m\} \subset C_0^\infty(a, \infty)$, 使得 $\lim\limits_{m\to\infty} g_m = f_1$ 且 $\{Mg_m\}$ 是 Cauchy 列. 于是 $\{g_m + f_2\} \subset \mathscr{D}(R)$, 而

$$\lim_{m\to\infty} (g_m + f_2) = f_1 + f_2 = f$$

且 $\{M(g_m + f_2)\}$ 是 Cauchy 列, 故 $f \in \mathscr{D}(\overline{R})$, 所以 $\mathscr{D}(H) \subset \mathscr{D}(\overline{R})$.

$\Leftarrow$　设 R 本质自伴, 下面来证明 $H = \overline{R}$, 这样由以上定理的证明便知问题 (P) 适定.

(1) $\overline{R} \subset H$.

设 $f \in \mathscr{D}(\overline{R})$, 存在 $\{f_m\} \subset \mathscr{D}(R)$ 使得 $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = f$, 而 $\lim\limits_{m\to\infty} Rf_m = \overline{R}f$, 因为 $\overline{R} \subset T_1(M)$, 此即 $\lim\limits_{m\to\infty} Mf_m = Mf$. 这样, $\{f_m\}$ 在 Hilbert 空间 $(\mathscr{D}(T_1(M)), (\cdot,\cdot)_1)$ 中收敛到 f. 由于 $D^k g(a), k = 0, 1, \cdots, 2n-1$ 都是它上面的连续线性泛函, 所以由 S 是闭的得

$$\sigma f = \lim_{m\to\infty} \sigma f_m \in S, \quad \mathbf{C}^{2n} \text{ 中的收敛}.$$

这样便有 $f \in \mathscr{D}(H)$, 故 $\overline{R} \subset H$.

(2) $H \subset \overline{R}$.

只需证明 $\mathscr{D}(H) \subset \mathscr{D}(\overline{R})$. 设 $f \in \mathscr{D}(H)$, 对任何 $h \in \mathscr{D}(R)$, 因为 $\mathrm{supp} h$ 紧, 由 Green 公式,

$$\begin{aligned}(Rh, f) &= (Mh, f) = (h, Mf) + [h, f]_a^\infty = (h, Mf) - [h, f](a)\\ &= (h, Mf) - (\boldsymbol{F}(a)\sigma h, \sigma f) = (h, Mf),\end{aligned}$$

这表示 $f \in \mathscr{D}(R^*)$, 但是 $R^* = \overline{R}^* = \overline{R}$, 故得 $f \in \mathscr{D}(\overline{R})$.

1.3　对称微分算子的亏指数与自伴延拓

设 M 是区间 I 上的对称正则微分算式, 则对任何 $f, g \in C_0^\infty(\mathring{I})$, 由 Green 公式有

$$(Mf, g) = (f, Mg),$$

即

$$(T_0(M)f, g) = (f, T_0(M)g),$$

取极限便知

$$(T_0(M)f,g)=(f,T_0(M)g),\quad f,g\in\mathscr{D}(T_0(M)),$$

所以 $T_0(M)$ 是对称算子. 当 I 是有限区间时,

$$My=\mathrm{i}y \text{ 和 } My=-\mathrm{i}y$$

的解都是平方可积的, 所以 $d_+=d_-=M$ 的阶数, 这时 $T_0(M)$ 必有自伴延拓, 它的自伴延拓也比较容易构造.

引理 1.3.1 设 M 是 $[a,b]$ 上的 n 阶正则微分算式, 对任意一组数 $a_1,\cdots,a_n$, $b_1,\cdots,b_n$, 存在 $f\in\mathscr{D}(T_1(M))$, 使得

$$\sigma f(a)=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\quad \sigma f(b)=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

证明 取 $h_1,h_2\in C^\infty$, 使得

$$h_1(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant\dfrac{3a+b}{4},\\ 0, & x\geqslant\dfrac{a+b}{2},\end{cases}\qquad h_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant\dfrac{a+b}{2},\\ 1, & x\geqslant\dfrac{a+3b}{4}.\end{cases}$$

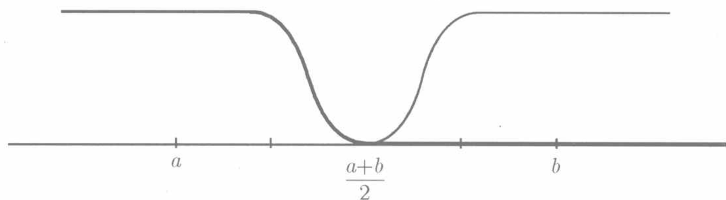


图 1.8

存在 n 阶多项式 p_1,p_2, 使得

$$p_1(a)=a_1,\quad p_1'(a)=a_2,\quad\cdots,\quad p_1^{(n-1)}(a)=a_n,$$

$$p_2(b)=b_1,\quad p_2'(b)=b_2,\quad\cdots,\quad p_2^{(n-1)}(b)=b_n,$$

令 $f=h_1p_1+h_2p_2$ 即可.

定理 1.3.1 设 M 是 $[a,b]$ 上 n 阶对称正则微分算式, 则 $\mathscr{D}$ 是 $T_0(M)$ 的某个自伴延拓 T 的定义域的充分必要条件是存在 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_{jk}),\boldsymbol{B}=(\beta_{jk})$, 使得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=n$ 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(a)^{-1}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(b)^{-1}\boldsymbol{B}^*,$$

而

$$\mathscr{D}=\left\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}f^{(k-1)}(a)+\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}f^{(k-1)}(b)=0,j=1,\cdots,n\right.\right\}.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $\mathscr{D}$ 是 $T_0(M)$ 的某个自伴延拓 T 的定义域, 则

$$\mathscr{D}=\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,|\langle f,f_j\rangle=0,j=1,\cdots,n\},$$

其中, $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 是 $\mathscr{D}(T_1(M))$ 中模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关的一组元素, 满足

$$\langle f_j,f_k\rangle=0,\quad j,k=1,\cdots,n,$$

而

$$\langle f,f_j\rangle=[f,f_j]|_a^b=(\boldsymbol{F}(b)\sigma f(b),\sigma f_j(b))-(\boldsymbol{F}(a)\sigma f(a),\sigma f_j(a)),$$

$$\sigma f=\begin{pmatrix}f\\f'\\\vdots\\f^{(n-1)}\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{U}=(\sigma f_1,\cdots,\sigma f_n)=\begin{pmatrix}f_1&f_2&\cdots&f_n\\f_1'&f_2'&\cdots&f_n'\\\vdots&\vdots&&\vdots\\f_1^{(n-1)}&f_2^{(n-1)}&\cdots&f_n^{(n-1)}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{U}^*=\begin{pmatrix}\overline{f_1}&\overline{f_1'}&\cdots&\overline{f_1^{(n-1)}}\\\overline{f_2}&\overline{f_2'}&\cdots&\overline{f_2^{(n-1)}}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\overline{f_n}&\overline{f_n'}&\cdots&\overline{f_n^{(n-1)}}\end{pmatrix},$$

于是 $\langle f,f_j\rangle=0,j=1,\cdots,n$, 可合并写成

$$\boldsymbol{U}^*(b)\boldsymbol{F}(b)\sigma f(b)-\boldsymbol{U}^*(a)\boldsymbol{F}(a)\sigma f(a)=0.$$

记

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}^*(b)\boldsymbol{F}(b),\quad \boldsymbol{A}=-\boldsymbol{U}^*(a)\boldsymbol{F}(a),$$

则有

$$\boldsymbol{A}\sigma f(a)+\boldsymbol{B}\sigma f(b)=0,$$

可以看出来这就是定理中的边条件, 剩下来要验证 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足条件! 因为

$$\langle f_k, f_j\rangle = 0, \quad j,k=1,2,\cdots,n,$$

所以

$$\boldsymbol{A}\sigma f_k(a) + \boldsymbol{B}\sigma f_k(b) = 0, \quad k=1,2,\cdots,n,$$

即

$$\boldsymbol{AU}(a) + \boldsymbol{BU}(b) = 0$$

或

$$\boldsymbol{U}^*(b)\boldsymbol{F}(b)\boldsymbol{U}(b) = \boldsymbol{U}^*(a)\boldsymbol{F}(a)\boldsymbol{U}(a),$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AF}(a)^{-1}\boldsymbol{A}^* &= -\boldsymbol{U}^*(a)\boldsymbol{F}(a)\boldsymbol{F}(a)^{-1}\left(-\boldsymbol{F}(a)^*\boldsymbol{U}(a)\right)\\ &= \boldsymbol{U}^*(a)\boldsymbol{F}(a)^*\boldsymbol{U}(a)\\ &= -\boldsymbol{U}^*(a)\boldsymbol{F}(a)\boldsymbol{U}(a)\\ &= -\boldsymbol{U}^*(b)\boldsymbol{F}(b)\boldsymbol{U}(b)\\ &= \boldsymbol{U}^*(b)\boldsymbol{F}(b)\boldsymbol{F}(b)^{-1}\left(\boldsymbol{U}^*(b)\boldsymbol{F}(b)\right)^*\\ &= \boldsymbol{BF}(b)^{-1}\boldsymbol{B}^*.\end{aligned}$$

下证 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}) = n$.

假若不然, 则存在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 不全为零, 使得 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}) = 0$, 即 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} -\boldsymbol{U}(a)^*\boldsymbol{F}(a) & \boldsymbol{U}(b)^*\boldsymbol{F}(b)\end{pmatrix} = 0$. 所以

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{U}(a)^*\boldsymbol{F}(a) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{U}(b)^*\boldsymbol{F}(b) = 0.$$

由于 $\boldsymbol{F}(a)$, $\boldsymbol{F}(b)$ 非退化, 故

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{U}(a)^* = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{U}(b)^* = 0,$$

即

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \overline{f_j^{(k)}(a)} = 0, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \overline{f_j^{(k)}(b)} = 0, \quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

这表示

$$\overline{\alpha_1} f_1 + \cdots + \overline{\alpha_n} f_n \in \mathscr{D}(T_0(M)),$$

与 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关矛盾!

$\Leftarrow$ 设

$$\mathscr{D} = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M))\,|\,\boldsymbol{A}\sigma f(a) + \boldsymbol{B}\sigma f(b) = 0\},$$

$$\boldsymbol{AF}(a)^{-1}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{BF}(b)^{-1}\boldsymbol{B}^*, \quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}) = n,$$

要找出 $\mathscr{D}(T_1(M))$ 上 n 个模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关的函数 $\{f_1,\cdots,f_n\}$, 满足

$$\langle f_j, f_k\rangle = 0, \quad j,k = 1,\cdots,n,$$

使得

$$\mathscr{D} = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) | \langle f, f_j\rangle = 0, \quad j = 1,\cdots,n\}.$$

对比前面的证明, 令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(a) &= (-\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(a)^{-1})^* = -(\boldsymbol{F}(a)^{-1})^*\boldsymbol{A}^* = -(\boldsymbol{F}(a)^*)^{-1}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{F}(a)^{-1}\boldsymbol{A}^*,\\ \boldsymbol{U}(b) &= (\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(b)^{-1})^* = (\boldsymbol{F}(b)^{-1})^*\boldsymbol{B}^* = -\boldsymbol{F}(b)^{-1}\boldsymbol{B}^*.\end{aligned}$$

以 $\boldsymbol{U}_j(a),\boldsymbol{U}_j(b)$ 分别表示 $\boldsymbol{U}(a),\boldsymbol{U}(b)$ 的第 j 列 (它们应当是 f_j 的边值 $\sigma f_j(a)$ 与 $\sigma f_j(b)$). 由引理 1.3.1 存在 $f_j \in \mathscr{D}(T_1(M))$, 使得

$$\sigma f_j(a) = \boldsymbol{U}_j(a), \quad \sigma f_j(b) = \boldsymbol{U}_j(b),$$

于是由

$$\boldsymbol{A}\sigma f(a) + \boldsymbol{B}\sigma f(b) = 0$$

得

$$-\boldsymbol{U}(a)^*\boldsymbol{F}(a)\sigma f(a) + \boldsymbol{U}(b)^*\boldsymbol{F}(b)\sigma f(b) = 0,$$

$$\boldsymbol{U}(b)^*\boldsymbol{F}(b)\sigma f(b) - \boldsymbol{U}(a)^*\boldsymbol{F}(a)\sigma f(a) = 0,$$

$$\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{U}_1(b)}^t\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{U}_n(b)}^t\end{pmatrix}\boldsymbol{F}(b)\sigma f(b) - \begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{U}_1(a)}^t\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{U}_n(a)}^t\end{pmatrix}\boldsymbol{F}(a)\sigma f(a) = 0,$$

$$\overline{\boldsymbol{U}_j(b)^t}\boldsymbol{F}(b)\sigma f(b) - \overline{\boldsymbol{U}_j(a)^t}\boldsymbol{F}(a)\sigma f(a) = 0, \quad j = 1,\cdots,n,$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{F}(b)\sigma f(b),\boldsymbol{U}_j(b)) - (\boldsymbol{F}(a)\sigma f(a),\boldsymbol{U}_j(a)) = 0, \quad j = 1,\cdots,n,\\ (\boldsymbol{F}(b)\sigma f(b),\sigma f_j(b)) - (\boldsymbol{F}(a)\sigma f(a),\sigma f_j(a)) = 0, \quad j = 1,\cdots,n.\end{aligned}$$

此即

$$\langle f, f_j\rangle = 0, \quad j = 1,\cdots,n.$$

剩下来要验证 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 满足所列的条件.

(1) $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关.

若不然, 设它们模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性相关, 即有分解式

$$f_j = f_{j0} + \psi_j, \quad j = 1,\cdots,n,$$

$$f_{j0} \in \mathscr{D}(T_0(M)), \quad \psi_j \in K_+\dot{+}K_-$$

且存在不全为零的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 使得

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \psi_j = 0,$$

即

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_{j0} \in \mathscr{D}(T_0(M)).$$

于是

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j^{(k)}(a) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j^{(k)}(b) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

即

$$\begin{pmatrix} f_1(a) & f_2(a) & \cdots & f_n(a) \\ f_1'(a) & f_2'(a) & \cdots & f_n'(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(a) & f_2^{(n-1)}(a) & \cdots & f_n^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(b) & f_2(b) & \cdots & f_n(b) \\ f_1'(b) & f_2'(b) & \cdots & f_n'(b) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(b) & f_2^{(n-1)}(b) & \cdots & f_n^{(n-1)}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

或

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(a) \\ \boldsymbol{U}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

由 $\boldsymbol{U}(a), \boldsymbol{U}(b)$ 的定义可得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0,$$

$$(\overline{\alpha_1}, \cdots, \overline{\alpha_n})\,(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}) = 0,$$

这与 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}) = n$ 矛盾!

(2) $\langle f_j, f_k \rangle = 0, \quad j, k = 1, \cdots, n.$

由于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(a)^{-1}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(b)^{-1}\boldsymbol{B}^*,$$

所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}(a)=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(b),$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(b)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}(a)=0.$$

于是

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_j(b)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_j(a)=0,\quad j=1,\cdots,n,$$

即

$$\boldsymbol{B}\sigma f_j(b)+\boldsymbol{A}\sigma f_j(a)=0,\quad j=1,\cdots,n,$$

所以 $\langle f_j,f_k\rangle=0, j,k=1,\cdots,n.$

特别的, 对于 Sturm-Liouville 算式

$$M=-DpD+q,\quad x\in[a,b],$$

有

推论 1.3.1 设

$$M=-DpD+q,\quad p,q\text{是实函数}, x\in[a,b],$$

则 $T_0(M)$ 的自伴延拓的定义域为

$$\mathscr{D}=\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,|p(b)(\beta_i'f'(b)-\beta_if(b))-p(a)(\alpha_i'f'(a)-\alpha_if(a))=0,\quad i=1,2\},$$

其中, $(\alpha_i,\alpha_i',\beta_i,\beta_i'), i=1,2$ 满足

(1) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_1'&\beta_1&\beta_1'\\ \alpha_2&\alpha_2'&\beta_2&\beta_2'\end{pmatrix}=2;$

(2) $p(b)(\overline{\beta_i'}\beta_j-\overline{\beta_i}\beta_j')-p(a)(\overline{\alpha_i'}\alpha_j-\overline{\alpha_i}\alpha_j')=0,\quad i,j=1,2.$

如果 $\alpha_i,\alpha_i',\beta_i,\beta_i'$ 是实数, 则条件 (2) 可简化为

$$p(a)\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_1'\\ \alpha_2&\alpha_2'\end{vmatrix}=p(b)\begin{vmatrix}\beta_1&\beta_1'\\ \beta_2&\beta_2'\end{vmatrix}.$$

证明 由于

$$\boldsymbol{F}(x)=\begin{pmatrix}0&-p(x)\\ p(x)&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1p(a)&-\alpha_1'p(a)\\ \alpha_2p(a)&-\alpha_2'p(a)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-\beta_1p(b)&\beta_1'p(b)\\ -\beta_2p(b)&\beta_2'p(b)\end{pmatrix},$$

由条件 (1), $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})=2$. 其次

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(a)^{-1}\boldsymbol{A}^* &= \begin{pmatrix} \alpha_1 p(a) & -\alpha_1' p(a) \\ \alpha_2 p(a) & -\alpha_2' p(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{p(a)} \\ -\dfrac{1}{p(a)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} p(a) & \overline{\alpha_2} p(a) \\ -\overline{\alpha_1'} p(a) & -\overline{\alpha_2'} p(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} p(a) & \overline{\alpha_2} p(a) \\ -\overline{\alpha_1'} p(a) & -\overline{\alpha_2'} p(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p(a)(\overline{\alpha_1}\alpha_1' - \overline{\alpha_1'}\alpha_1) & p(a)(\overline{\alpha_2}\alpha_1' - \overline{\alpha_2'}\alpha_1) \\ p(a)(\overline{\alpha_1}\alpha_2' - \overline{\alpha_1'}\alpha_2) & p(a)(\overline{\alpha_2}\alpha_2' - \overline{\alpha_2'}\alpha_2) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

同样

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(b)^{-1}\boldsymbol{B}^* = \begin{pmatrix} p(b)(\overline{\beta_1}\beta_1' - \overline{\beta_1'}\beta_1) & p(b)(\overline{\beta_2}\beta_1' - \overline{\beta_2'}\beta_1) \\ p(b)(\overline{\beta_1}\beta_2' - \overline{\beta_1'}\beta_2) & p(b)(\overline{\beta_2}\beta_2' - \overline{\beta_2'}\beta_2) \end{pmatrix},$$

由条件 (2),

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(a)^{-1}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(b)^{-1}\boldsymbol{B}^*,$$

于是结论由定理 1.3.1 可得.

一类简单的边条件是这样的 —— 每个边条件只含某一个端点的函数值与导数值, 这样的边条件称为分离型的边条件. 于是有

$$\beta_1 = \beta_1' = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_2' = 0.$$

而 α_1, α_1' 不同时为 0, β_2, β_2' 不同时为 0. 这样

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \beta_2' \end{pmatrix} = 2$$

条件 (1) 成立.

至于条件 (2), 当 $i \neq j$ 时, 显然满足. 而当 $i = j = 1$ 时,

$$-p(a)(\overline{\alpha_1'}\alpha_1 - \overline{\alpha_1}\alpha_1') = 0;$$

当 $i = j = 2$ 时,

$$p(b)(\overline{\beta_2'}\beta_2 - \overline{\beta_2}\beta_2') = 0.$$

因为 $p(a)p(b) \neq 0$, 故

$$\alpha_1\overline{\alpha_1'} = \overline{\alpha_1}\alpha_1', \quad \beta_2\overline{\beta_2'} = \overline{\beta_2}\beta_2',$$

即 $\alpha_1\overline{\alpha_1'}, \beta_2\overline{\beta_2'}$ 是实的. 这时边条件变成

$$\begin{cases} \alpha_1' f'(a) - \alpha_1 f(a) = 0, \\ \beta_2' f'(b) - \beta_2 f(b) = 0, \end{cases}$$

如果 $\alpha_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1, \alpha_1' = a_2 + \mathrm{i}b_2$, 则

$$0 = \mathrm{Im}\alpha_1\overline{\alpha_1'} = \mathrm{Im}(a_1 + \mathrm{i}b_1)(a_2 - \mathrm{i}b_2) = -a_1b_2 + a_2b_1 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

所以

$$\alpha_1' = \tau\alpha_1, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

于是第一个边条件变成

$$\tau f'(a) - f(a) = 0, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

因此, 一般分离型边条件为

$$\begin{cases} f(a)\cos\alpha - f'(a)\sin\alpha = 0, \\ f(b)\cos\beta - f'(b)\sin\beta = 0, \end{cases}$$

其中, α, β 是实数. 区别于分离型边条件, 一般的边条件称为混合型边条件. 例如, 取

$$\alpha_1' = \beta_1' = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = 0,$$

则

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2' \end{pmatrix} = 2,$$

条件 (1) 成立, 至于条件 (2), 当 $i = j = 1$ 和 $i = j = 2$ 时, 显然成立. 而当 $i \neq j$ 时,

$$-p(b)\overline{\beta_1}\beta_2' + p(a) = 0,$$

所以

$$\overline{\beta_1}\beta_2' = \frac{p(a)}{p(b)}.$$

这时边条件是

$$\begin{cases} -p(b)\beta_1 f(b) + p(a)f(a) = 0, \\ p(b)\beta_2' f'(b) - p(a)f'(a) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(a) = \beta_1 \dfrac{p(b)}{p(a)} f(b), \\[2ex] f'(a) = \beta_2' \dfrac{p(b)}{p(a)} f'(b). \end{cases}$$

取 $\beta_1 = \dfrac{p(a)}{p(b)}\gamma, \beta_2' = \dfrac{p(a)}{p(b)}\delta$, 则得

$$\begin{cases} f(a) = \gamma f(b), \\ f'(a) = \delta f'(b). \end{cases}$$

由 $\overline{\beta}_1\beta_2' = \dfrac{p(a)}{p(b)}$ 得

$$\overline{\gamma}\delta\left(\frac{p(a)}{p(b)}\right)^2 = \left(\frac{p(a)}{p(b)}\right), \quad 即 \quad \overline{\gamma}\delta = \frac{p(b)}{p(a)}.$$

推论 1.3.1 里的第 2 个条件实际上是以下 3 个:

$$\begin{cases} p(b)(\overline{\beta_1'}\beta_1 - \overline{\beta_1}\beta_1') = p(a)(\overline{\alpha_1'}\alpha_1 - \overline{\alpha_1}\alpha_1'), \\ p(b)(\overline{\beta_2'}\beta_2 - \overline{\beta_2}\beta_2') = p(a)(\overline{\alpha_2'}\alpha_2 - \overline{\alpha_2}\alpha_2'), \\ p(b)(\overline{\beta_1'}\beta_2 - \overline{\beta_1}\beta_2') = p(a)(\overline{\alpha_1'}\alpha_2 - \overline{\alpha_1}\alpha_2'), \end{cases}$$

第 4 个

$$p(b)(\overline{\beta_2'}\beta_1 - \overline{\beta_2}\beta_1') = p(a)(\overline{\alpha_2'}\alpha_1 - \overline{\alpha_2}\alpha_1')$$

是第 3 个取共轭再加负号的结果. 如果 $\beta_1, \beta_1', \beta_2, \beta_2', \alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \alpha_2'$ 都是实的, 则头 2 个条件自然满足, 这时第 3 个条件变成

$$p(b)\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{vmatrix} = p(a)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1' & \alpha_2' \end{vmatrix},$$

当

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1' & \alpha_2' \end{vmatrix} = 0$$

时, 得到分离型的边条件

$$\begin{cases} \alpha f'(a) - \beta f(a) = 0, \\ \gamma f'(b) - \delta f(b) = 0. \end{cases}$$

当 I 是无限区间时, 通过 Kodaira 公式 (见 3.11 节), 可以只考虑 $[a, \infty)$ 的情形.

(1) 如果 M 是实对称正则微分算式, 显然

$$My = \mathrm{i}y \text{ 和 } My = -\mathrm{i}y$$

具有相同数目的平方可积解, 因而 $d_+ = d_-$, 且由定理 1.2.3

$$\frac{M \text{ 阶数}}{2} \leqslant d_+ = d_- \leqslant M \text{ 的阶数},$$

这时 $T_0(M)$ 有自伴延拓. Glazman 证明 (YMH 40(1950), 102~135), 给定 $I = [a, \infty)$ 和 order$M = 2n$, 适当选取微分算式 M, 可以使得 $d_+(M) = d_-(M)$ 取 n 和 $2n$ 之间的一切自然数.

(2) 如果 M 是复对称正则微分算式, 情况较复杂, 这时 $T_0(M)$ 就不一定总有自伴延拓了.

例 1.3.1　$M = \mathrm{i}D$, $My = \pm\mathrm{i}y, y = \mathrm{e}^{\pm x}$.

(1) $I = [0, \infty)$.

$d_+ = 0, d_- = 1$, $T_0(M)$ 没有自伴延拓.

(2) $I = (-\infty, \infty)$.

$d_+ = d_- = 0$, $T_0(M)$ 是自伴算子.

第 2 章　常型自伴微分算子的谱论

考虑有限区间 $[a,b]$ 上由对称正则微分算式所生成的自伴微分算子的谱和谱分解问题. 先讨论特殊的二阶 Sturm-Liouville 算子, 这是在数学物理中常碰到的微分算子, 然后再讨论一般情形.

$$M=-DpD+q,\quad x\in[a,b].$$

记 $f=p^{\frac{1}{4}}$, 这是 $[a,b]$ 上正的可微函数, 作 Liouville 变换

$$\begin{cases} y=fu \ \text{或}\ u=\dfrac{y}{f}, \\ t=\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_a^x\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{p(\tau)}}, \end{cases}$$

适当选取常数 k, 可以使得 $x\in[a,b]\to t\in[0,\pi]$. 因为

$$\begin{aligned} Du&=\left(\frac{y}{f}\right)'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{y'f-yf'}{f^2}\frac{1}{k}\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}, \\ pDu&=\frac{p^{\frac{1}{2}}}{k}\frac{y'f-yf'}{f^2}=\frac{1}{k}\left(y'f-yf'\right), \\ DpDu&=\frac{1}{k}\left(y'f-yf'\right)'\frac{1}{k}\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{k^2}\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\left(y''f+y'f'-y'f'-yf''\right) \\ &=\frac{1}{k^2p^{\frac{1}{2}}}\left(y''f-yf''\right). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} Mu&=-DpDu+qu=-\frac{1}{k^2p^{\frac{1}{2}}}\left(y''f-yf''\right)+\frac{qy}{f} \\ &=-\frac{1}{k^2f}y''+\left(\frac{q}{f}+\frac{f''}{k^2f^2}\right)y \\ &=\frac{1}{k^2f}\left(-y''+\left(k^2q+\frac{f''}{f}\right)y\right)=\frac{1}{k^2f}M_1y, \end{aligned}$$

其中, $M_1y=-y''+\left(k^2q+\dfrac{f''}{f}\right)y, t\in[0,\pi]$. 因此可以考虑更简单的 Titchmarsh 算子

$$-D^2+q,\quad x\in[0,\pi],\quad \text{其中},\quad q\in C[0,\pi].$$

设 T 是 $T_0(M)$ 的一个具有分离型边条件的自伴延拓, 即

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(T) = &\{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) | f(0)\cos\alpha + f'(0)\sin\alpha = 0,\\ &f(\pi)\cos\beta + f'(\pi)\sin\beta = 0\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

要问

(1) $\sigma(T) = ?$

(2) T 的谱分解是什么?

古典的结果是

$$\sigma(T) = \sigma_p(T),$$

T 的规范化特征函数组是 $L^2[a, b]$ 的规范正交基.

2.1 特征值与特征函数的渐近式

Liouville 通过求微分方程解的渐近公式得到 T 有可数个特征值 (1836, 1837).

定理 2.1.1 对任意的 $\alpha \in \mathbf{R}$, Cauchy 问题

$$\begin{cases} -y'' + qy = \lambda y, \\ y(0, \lambda) = \sin\alpha, \\ y'(0, \lambda) = -\cos\alpha \end{cases}$$

存在唯一的解 $\varphi(x, \lambda)$. 对每个固定的 $x \in [0, \pi]$, $\varphi(x, \lambda)$ 是 λ 的整函数.

证明 令

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = (q - \lambda)y, \end{cases}$$

则初始条件变成

$$\begin{cases} y(0) = \sin\alpha, \\ z(0) = -\cos\alpha. \end{cases}$$

化成积分方程组得

$$\begin{cases} y(x) = \sin\alpha + \displaystyle\int_0^x z(t)\mathrm{d}t, \\ z(x) = -\cos\alpha + \displaystyle\int_0^x (q(t) - \lambda)y(t)\mathrm{d}t. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} y(x) &= \sin\alpha - x\cos\alpha + \int_0^x \mathrm{d}t \int_0^t (q(\tau) - \lambda)\, y(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \sin\alpha - x\cos\alpha + \int_0^x \mathrm{d}\tau \int_\tau^x (q(\tau) - \lambda)y(\tau)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

即

$$y(x)=\sin\alpha-x\cos\alpha+\int_0^x(q(\tau)-\lambda)(x-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

用逐次逼近法解此积分方程, 取

$$\varphi_0(x,\lambda)=\sin\alpha-x\cos\alpha,$$

令

$$\varphi_n(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^x(q(t)-\lambda)(x-t)\varphi_{n-1}(t,\lambda)\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots,$$

讨论收敛性, 设

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}|q(x)|\leqslant L,\quad |\lambda|\leqslant N,\quad \sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}|\varphi_0(x,\lambda)|\leqslant K,$$

那么

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x,\lambda)-\varphi_0(x,\lambda)|&=\left|\int_0^x(q(t)-\lambda)(x-t)\varphi_0(t,\lambda)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x K(L+N)(x-t)\mathrm{d}t\\&=K(L+N)\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)\Big|_0^x=\frac{1}{2}K(L+N)x^2,\\|\varphi_2(x,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda)|&=\left|\int_0^x(q(t)-\lambda)(x-t)\left(\varphi_1(t,\lambda)-\varphi_0(t,\lambda)\right)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant(L+N)\pi\int_0^x|\varphi_1(t,\lambda)-\varphi_0(t,\lambda)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{1}{2}K(L+N)^2\pi\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3!}K(L+N)^2\pi x^3.\end{aligned}$$

一般地, 由

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)|&\leqslant\left|\int_0^x(q(t)-\lambda)(x-t)(\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda))\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant(L+N)\pi\int_0^x|\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda)|\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

可得

$$|\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}K(L+N)^n\pi^{n-1}x^{n+1}.$$

于是

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda))$$

在 $|\lambda| \leqslant N$ 和 $x \in [0,\pi]$ 上一致收敛. 而

$$\varphi_n'(x,\lambda) - \varphi_{n-1}'(x,\lambda) = \int_0^x (q(t)-\lambda)\left(\varphi_{n-1}(t,\lambda) - \varphi_{n-2}(t,\lambda)\right)\mathrm{d}t, \quad n = 2,3,\cdots,$$

$$\varphi_n''(x,\lambda) - \varphi_{n-1}''(x,\lambda) = (q(x)-\lambda)\left(\varphi_{n-1}(x,\lambda) - \varphi_{n-2}(x,\lambda)\right), \quad n = 2,3,\cdots.$$

级数

$$-\cos\alpha + \int_0^x (q(t)-\lambda)\varphi_0(t,\lambda)\mathrm{d}t + \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x (q(t)-\lambda)\left(\varphi_{n-1}(t,\lambda) - \varphi_{n-2}(t,\lambda)\right)\mathrm{d}t,$$

$$(q(x)-\lambda)\varphi_0(x,\lambda) + \sum_{n=2}^{\infty}(q(x)-\lambda)\left(\varphi_{n-1}(x,\lambda) - \varphi_{n-2}(x,\lambda)\right)$$

也都在 $x \in [0,\pi]$ 上一致收敛, 所以可以逐项微分

$$\begin{aligned}\varphi''(x,\lambda) &= (q(x)-\lambda)\left(\varphi_0(x,\lambda) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\varphi_{n-1}(x,\lambda) - \varphi_{n-2}(x,\lambda)\right)\right)\\ &= (q(x)-\lambda)\left(\varphi_0(x,\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{n}(x,\lambda) - \varphi_{n-1}(x,\lambda)\right)\right)\\ &= (q(x)-\lambda)\varphi(x,\lambda),\end{aligned}$$

即 $\varphi(x,\lambda)$ 满足微分方程, 此外

$$\varphi(0,\lambda) = \sin\alpha, \quad \varphi'(0,\lambda) = -\cos\alpha,$$

所以 $\varphi(x,\lambda)$ 是 Cauchy 问题的解. 由于每一个 $\varphi_n(x,\lambda)$ 都是 λ 的整函数, 所以 $\varphi(x,\lambda)$ 作为整函数一致收敛的极限也是 λ 的整函数.

令

$$\begin{cases}\cot\alpha = -h,\\ \cot\beta = H,\end{cases}$$

假设 $h, H \neq \infty$, 则边条件变成

$$\begin{cases}f'(0) - hf(0) = 0,\\ f'(\pi) + Hf(\pi) = 0.\end{cases}$$

设 $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\psi(x,\lambda)$ 分别满足

$$\begin{cases}My = \lambda y,\\ y(0) = 1,\\ y'(0) = h,\end{cases}\qquad \begin{cases}My = \lambda y,\\ y(0) = 0,\\ y'(0) = 1,\end{cases}$$

它们组成了方程 $My=\lambda y$ 的基本解组且 $\varphi(x,\lambda)$ 满足第 1 个边条件.

引理 2.1.1 记 $\lambda=s^2$, 则

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau,$$

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau.$$

证明 方程

$$y''+s^2y=qy$$

的齐次方程的通解是

$$y=c_1\cos sx+c_2\sin sx,$$

利用常数变易法

$$\begin{aligned}
c_1'\cos sx+c_2'\sin sx&=0,\\
y'&=-sc_1\sin sx+sc_2\cos sx,\\
y''&=-sc_1'\sin sx+sc_2'\cos sx-s^2c_1\cos sx-s^2c_2\sin sx\\
&=-sc_1'\sin sx+sc_2'\cos sx-s^2y,
\end{aligned}$$

代入方程得

$$-sc_1'\sin sx+sc_2'\cos sx=qy,$$

$$c_1's\sin sx-c_2's\cos sx=-qy,$$

联立起来, 解得

$$c_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin sx\\ -qy & s\cos sx\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos sx & \sin sx\\ s\sin sx & -s\cos sx\end{vmatrix}}=-\frac{\sin sx}{s}qy,$$

$$c_2'=\frac{\begin{vmatrix}\cos sx & 0\\ s\sin sx & -qy\end{vmatrix}}{-s}=\frac{\cos sx}{s}qy.$$

于是

$$c_1=-\int_0^x\frac{\sin s\tau}{s}q(\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau+\alpha_1,$$

$$c_2=\int_0^x\frac{\cos s\tau}{s}q(\tau)y\,(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\alpha_2,$$

故

$$y=\alpha_1\cos sx+\alpha_2\sin sx+\int_0^x\frac{-\sin s\tau\cos sx+\cos s\tau\sin sx}{s}qy\mathrm{d}\tau$$
$$=\alpha_1\cos sx+\alpha_2\sin sx+\int_0^x\frac{\sin s(x-\tau)}{s}qy\mathrm{d}\tau.$$

如果 $y(0)=1,\ y'(0)=h$, 则

$$\alpha_1=1,\quad s\alpha_2=h,\quad \alpha_2=\frac{h}{s},$$

所以 $\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x\sin s(x-\tau)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau$. 同理, 可得关于 ψ 的方程.

引理 2.1.2 记 $s=\sigma+\mathrm{i}t$, 则存在 $s_0>0$, 使得当 $|s|>s_0$ 时有

$$\varphi(x,\lambda)=O\left(\mathrm{e}^{|t|x}\right),\quad \psi(x,\lambda)=O\left(\frac{\mathrm{e}^{|t|x}}{|s|}\right),$$

或者更准确些

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O\left(\frac{\mathrm{e}^{|t|x}}{|s|}\right),\quad \psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+O\left(\frac{\mathrm{e}^{|t|x}}{|s|^2}\right),$$

这些估计式对 $x\in[0,\pi]$ 一致成立.

证明 令

$$\varphi(x,\lambda)=\mathrm{e}^{|t|x}F(x),$$

则

$$F(x)=\left(\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx\right)\mathrm{e}^{-|t|x}+\frac{1}{s}\int_0^x\sin s(x-\tau)q(\tau)\mathrm{e}^{-|t|(x-\tau)}F(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

设 $\mu=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}|F(x)|$, 则①

$$\mu\leqslant 1+\frac{|h|}{|s|}+\frac{\mu}{|s|}\int_0^{\pi}|q(\tau)|\,\mathrm{d}\tau,$$

---

① 由于 s 是复的, 所以对 $\cos sx$, $\sin sx$ 估计时要小心! 因为

$$|\cos sx|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}}{2}\right|=\frac{\left|\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma x}+\mathrm{e}^{tx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}\right|}{2}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-tx}+\mathrm{e}^{tx}}{2}\leqslant\mathrm{e}^{|t|x},$$

$$|\sin sx|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}}{2\mathrm{i}}\right|\leqslant\mathrm{e}^{|t|x},$$

所以 $\left|(\cos sx)\,\mathrm{e}^{-|t|x}\right|$, $\left|(\sin sx)\,\mathrm{e}^{-|t|x}\right|$, $\left|(\sin s(x-\tau))\,\mathrm{e}^{-|t|(x-\tau)}\right|\leqslant 1$.

所以

$$\mu \leqslant \frac{1+\dfrac{|h|}{|s|}}{1-\dfrac{1}{|s|}\displaystyle\int_0^{\pi}|q(\tau)|\,\mathrm{d}\tau}, \quad \text{与 } x \text{ 无关!}$$

取 $s_0=\displaystyle\int_0^{\pi}|q(\tau)|\,\mathrm{d}\tau>0$, 于是当 $|s|>s_0$ 时, μ 小于一个正常数, 因而

$$\varphi(x,\lambda)=O\left(\mathrm{e}^{|t|x}\right).$$

估计式对 $x\in[0,\pi]$ 一致成立. 利用这个估计式, 进一步得到

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^{x}\sin s(x-\tau)q(\tau)O\left(\mathrm{e}^{|t|\tau}\right)\mathrm{d}\tau.$$

因为

$$\frac{\left|\dfrac{h}{s}\sin sx\right|}{\dfrac{\mathrm{e}^{|t|x}}{|s|}}=\frac{|h|\,|\sin sx|}{\mathrm{e}^{|t|x}}\leqslant\frac{|h|\mathrm{e}^{|t|x}}{\mathrm{e}^{|t|x}}=|h|, \quad x\in[0,\pi],$$

而

$$|\sin s(x-\tau)|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-t(x-\tau)}+\mathrm{e}^{t(x-\tau)}}{2}\leqslant\mathrm{e}^{|t|(x-\tau)},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\left|\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^{x}\sin s(x-\tau)q(\tau)O\left(\mathrm{e}^{|t|\tau}\right)\mathrm{d}\tau\right|}{\mathrm{e}^{|t|x}/\,|s|}&\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}^{|t|x}}\int_0^{x}\frac{A\mathrm{e}^{|t|\tau}}{2}\left(\mathrm{e}^{-t(x-\tau)}+\mathrm{e}^{t(x-\tau)}\right)\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\frac{A}{\mathrm{e}^{|t|x}}\int_0^{x}\mathrm{e}^{|t|\tau}\mathrm{e}^{|t|(x-\tau)}\mathrm{d}\tau\leqslant A\pi, \quad x\in[0,\pi].\end{aligned}$$

于是

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O\left(\frac{\mathrm{e}^{|t|x}}{|s|}\right),$$

估计式对 $x\in[0,\pi]$ 一致成立. 同理, 可得关于 ψ 的估计式.

下面来推导特征值和特征函数的渐近估计, 从这些估计式可以得到存在着可数个特征值的结论. 特征值是实的, 而由 Sturm 的理论 (见定理 2.2.3), 负特征值只有有限个, 故假定 $\lambda>0$. 如果 $\lambda>0$, 则由 $\lambda=s^2$, $\mathrm{Im}s=0$ 得

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O\left(\frac{1}{s}\right).$$

另外由

$$\varphi'(x,\lambda)=-s\sin sx+h\cos sx+\int_0^x\cos s(x-\tau)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau,$$

如果 $A_1\varphi+B_1\psi$ 是对应于 λ 的 T 的特征函数, 则由第 1 个边条件得

$$(A_1\varphi'(0,\lambda)+B_1\psi'(0,\lambda))-h\left(A_1\varphi(0,\lambda)+B_1\psi(0,\lambda)\right)=0,$$

即 $A_1h+B_1-A_1h=0$. 于是 $B_1=0$. 因为 $\varphi(x,\lambda)$ 满足第 1 个边条件, 所以若 λ 是特征值, $\varphi(x,\lambda)$ 一定要满足

$$\varphi'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)=0,$$

($\omega(\lambda)=\varphi'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)$ 是个不恒为零的整函数, 它最多有可数个零点, 这些零点没有有限的聚点.) 即

$$\begin{aligned}&-s\sin s\pi+h\cos s\pi+\int_0^\pi\cos s(\pi-\tau)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau\\&+H\left(\cos s\pi+\frac{h}{s}\sin s\pi+\frac{1}{s}\int_0^\pi\sin s(\pi-\tau)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau\right)=0,\\&\sin s\pi\left(-s+\int_0^\pi\sin s\tau q\left(\tau\right)\varphi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau+\frac{Hh}{s}+\frac{H}{s}\int_0^\pi\cos s\tau q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau\right)\\&+\cos s\pi\left(h+\int_0^\pi\cos s\tau q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau+H-\frac{H}{s}\int_0^\pi\sin s\tau q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau\right)=0.\end{aligned}$$

把它写成

$$(-s+B)\sin s\pi+A\cos s\pi=0,$$

其中,

$$\begin{aligned}A&=h+H+\int_0^\pi\left(\cos s\tau-\frac{H}{s}\sin s\tau\right)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau,\\B&=\frac{Hh}{s}+\int_0^\pi\left(\sin s\tau+\frac{H}{s}\cos s\tau\right)q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

因为 $\varphi(\tau,\lambda)$ 在 $[0,\pi]$ 上有界, 所以对充分大的 s,

$$A=h+H+O(1),\quad B=O(1).$$

于是有

$$-s\sin s\pi+(h+H)\cos s\pi+O(1)=0,$$

即

$$\sin s\pi-\frac{h+H}{s}\cos s\pi+\frac{O(1)}{s}=0,$$

这样, 对充分大的 s 来说, 这个方程有解, 而且解靠近整数. 所以存在着可数个特征值. 由于

$$\omega'(s) = -\sin s\pi - s\pi\cos s\pi - \pi(h+H)\sin s\pi + O(1),$$

当 s 靠近整数时, 它不等于零, 所以特征值的重数为 1.

来看特征值的渐近估计. 设 $s_n = n + \delta_n$, 则

$$-(n+\delta_n)\sin(n+\delta_n)\pi + (h+H)\cos(n+\delta_n)\pi + O(1) = 0,$$

$$(-1)^{n+1}(n+\delta_n)\sin\delta_n\pi + (-1)^n(h+H)\cos\delta_n\pi + O(1) = 0,$$

$$-(n+\delta_n)\sin\delta_n\pi + (h+H)\cos\delta_n\pi = O(1),$$

所以 $\sin\delta_n\pi = \dfrac{O(1)}{n+\delta_n} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\delta_n\pi = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 即 $s_n = n + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$. 这个渐近估计式还可以进一步改进, 假定 q 有有界的导数, 由引理 2.1.2,

$$\begin{aligned}
A &= h + H + \int_0^\pi \left(\cos s\tau - \frac{H}{s}\sin s\tau\right) q(\tau)\left(\cos s\tau + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)\mathrm{d}\tau \\
&= h+H+\int_0^\pi \cos^2 s\tau q(\tau)\mathrm{d}\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) = h+H+\int_0^\pi \frac{1+\cos 2s\tau}{2}q(\tau)\mathrm{d}\tau + O\left(\frac{1}{s}\right), \\
B &= \frac{hH}{s} + \int_0^\pi \left(\sin s\tau + \frac{H}{s}\cos s\tau\right) q(\tau)\left(\cos s\tau + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^\pi \sin s\tau\cos s\tau q(\tau)\mathrm{d}\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2s\tau q(\tau)\mathrm{d}\tau + O\left(\frac{1}{s}\right),
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos 2s\tau q(\tau)\mathrm{d}\tau &= \frac{\sin 2s\tau}{2s}q(\tau)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin 2s\tau}{2s}q'(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\sin 2s\pi}{2s}q(\pi) - \frac{1}{2s}\int_0^\pi \sin 2s\tau q'(\tau)\mathrm{d}\tau = O\left(\frac{1}{s}\right),
\end{aligned}$$

同样

$$\int_0^\pi \sin 2s\tau q(\tau)\mathrm{d}\tau = O\left(\frac{1}{s}\right),$$

所以 $A = h + H + h_1 + O\left(\dfrac{1}{s}\right)$, 其中, $h_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi q(t)\mathrm{d}t$ 且 $B = O\left(\dfrac{1}{s}\right)$. 于是由

$$(-s+B)\sin s\pi + A\cos s\pi = 0$$

得

$$\left(s + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)\sin s\pi = \left(h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)\cos s\pi,$$

$$\tan s\pi = \frac{h+H+h_1+O\left(\frac{1}{s}\right)}{s+O\left(\frac{1}{s}\right)}.$$

令 $s=n+\delta_n$, 得

$$\begin{aligned}\tan\delta_n\pi &= \frac{h+H+h_1+O\left(\frac{1}{n}\right)}{n+O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{h+H+h_1+O\left(\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\\ &= \frac{h+H+h_1+O\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \left(\frac{h+H+h_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \frac{h+H+h_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\delta_n = \frac{h+H+h_1}{n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$s_n = n+\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

其中,

$$c=\frac{1}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

(如果 $q\in C^2[0,\pi]$, 则可得 $s_n=n+\frac{c}{n}+\frac{c_1}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.)

对应的特征函数的渐近公式如何?

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda) &= \cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)\left(\cos s\tau+O\left(\frac{1}{s}\right)\right)\mathrm{d}\tau\\ &= \cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\cos s\tau q(\tau)\mathrm{d}\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\\ &= \cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \frac{\sin sx+\sin s(x-2\tau)}{2}q(\tau)\mathrm{d}\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\\ &= \cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(\tau)\mathrm{d}\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right).\end{aligned}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin s(x-2\tau)q(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \frac{\cos s(x-2\tau)}{2s}q(\tau)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{\cos s(x-2\tau)}{2s}q'(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\cos sx}{2s}(q(x)-q(0)) - \int_0^x \frac{\cos s(x-2\tau)}{2s}q'(\tau)\mathrm{d}\tau = O\left(\frac{1}{s}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \varphi(x,\lambda_n) \\ &= \cos\left(n+\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x + \frac{h}{n+\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\sin\left(n+\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x \\ &\quad + \frac{\sin\left(n+\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x}{2\left(n+\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\int_0^x q(\tau)\mathrm{d}\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \cos nx\cos\left(\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x - \sin nx\sin\left(\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x \\ &\quad + \frac{h}{n}\frac{1}{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\left(\sin nx\cos\left(\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x+\cos nx\sin\left(\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x\right) \\ &\quad + \frac{\sin nx\cos\left(\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x+\cos nx\sin\left(\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x}{2n} \\ &\quad \cdot\frac{1}{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\int_0^x q(\tau)\mathrm{d}\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

因为

$$\cos\left(\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x = 1-2\sin^2\left(\frac{c}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x = 1+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\sin\left(\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x = \frac{c}{n}x+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{1}{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \cos nx - \frac{cx}{n}\sin nx + \frac{h}{n}\sin nx + \frac{\sin nx}{2n}\int_0^x q(\tau)\mathrm{d}\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

其中,

$$\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

将 $\varphi_n(x)$ 规范化

$$\alpha_n^2 = \int_0^{\pi} \varphi_n^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos^2 nx\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \beta(x)\sin 2nx\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由于

$$\int_0^{\pi} \beta(x)\sin 2nx\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2nx}{2n}\beta(x)|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \beta'(x)\frac{\cos 2nx}{2n}\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

故

$$\alpha_n^2 = \int_0^{\pi} \cos^2 nx\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

这样

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故规范化了的特征函数有渐近式①

$$\nu_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

---

① 事实上, 由引理 2.1.2,

$$\begin{aligned}\varphi_n(x,\lambda_n) &= \cos s_n x + O\left(\frac{1}{s_n}\right) = \cos\left(n + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \cos nx\cos O\left(\frac{1}{n}\right) - \sin nx\sin O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \cos nx\left(1 - 2\sin^2 O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sin nx\sin O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \cos nx\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \sin nx O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \cos nx + O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_n^2 &= \int_0^{\pi} \varphi_n^2(x,\lambda_n)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos^2 nx\mathrm{d}x + 2\int_0^{\pi} \cos nx \cdot O\left(\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} O\left(\frac{1}{n^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\nu_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}\varphi_n(x,\lambda_n) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\cos nx + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

假设 $h=\infty, H\neq\infty(h\neq\infty, H=\infty$ 可以用变换 $t=\pi-x$ 化成 $h=\infty,\ H\neq\infty$ 的情形), 这时边条件变成

$$\begin{cases} f(0)=0, \\ f'(\pi)+Hf(\pi)=0, \end{cases}$$

$\psi(x,\lambda)$ 满足第 1 个边条件, 所以特征函数一定是 $\psi(x,\lambda)$ 的倍数.

$$\psi'(x,\lambda)=\cos sx+\int_0^x \cos s(x-\tau)q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau,$$

代入第 2 个边条件得

$$\cos s\pi+\int_0^\pi \cos s(\pi-\tau)q\,(\tau)\,\psi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau$$
$$+H\left(\frac{\sin s\pi}{s}+\frac{1}{s}\int_0^\pi \sin s(\pi-\tau)q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\right)\mathrm{d}\tau=0,$$

这就是特征值 λ 需要满足的方程. 它是一个不恒为零的整函数. 可是由引理 2.1.2,

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

故得

$$\cos s\pi+\frac{1}{s}\int_0^\pi \cos s(\pi-\tau)\sin s\tau q(\tau)\mathrm{d}\tau+H\frac{\sin s\pi}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=0. \tag{2.1}$$

于是

$$\cos s\pi=O\left(\frac{1}{s}\right),$$

所以当 s 很大时,

$$s\sim n+\frac{1}{2},$$

存在着无穷多个特征值, 式 (2.1) 左边对 s 求导数, 再让 $s=n+\dfrac{1}{2}$ 得

$$-\pi\sin s\pi+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\Big|_{s=n+\frac{1}{2}}\neq 0,$$

所以特征值的重数为 1. 为了得到特征值较精确的渐近式, 假定 q 有有界导数, 这时

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos s(\pi-\tau)\sin s\tau q\,(\tau)\,\mathrm{d}\tau&=\cos s\pi\int_0^\pi q(\tau)\cos s\tau\sin s\tau\mathrm{d}\tau+\sin s\pi\int_0^\pi q(\tau)\sin^2 s\tau\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\cos s\pi}{2}\int_0^\pi q(\tau)\sin 2s\tau\mathrm{d}\tau+\sin s\pi\int_0^\pi q(\tau)\frac{1-\cos 2s\tau}{2}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\sin s\pi}{2}\int_0^\pi q(\tau)\mathrm{d}\tau+O\left(\frac{1}{s}\right),\end{aligned}$$

于是由式 (2.1), 特征值要满足

$$\cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{s}\left(H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)\mathrm{d}\tau\right) + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0.$$

设 $s_n = n + \dfrac{1}{2} + \delta_n$, 则

$$\cot\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n\right)\pi = -\frac{H_1}{n + \dfrac{1}{2} + \delta_n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad H_1 = H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\begin{aligned} -\tan\delta_n\pi &= -\left(\frac{H_1}{n + \dfrac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{1 + \dfrac{\delta_n}{n + \dfrac{1}{2}}}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{H_1}{n + \dfrac{1}{2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{H_1}{n + \dfrac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

于是

$$\tan\delta_n\pi = \frac{H_1}{n + \dfrac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \delta_n = \frac{H_1}{\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故得

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

再看特征函数的渐近式, 由引理 2.1.1 与引理 2.1.2,

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^{x} \sin s(x - \tau)q(\tau)\left(\frac{\sin s\tau}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right). \end{aligned}$$

于是

$$\psi_n(x)=\psi(x,\lambda_n)=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{H_1}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}\right)x}{\left(n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{H_1}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}\right)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

而

$$\begin{aligned}\sin\left(n+\frac{1}{2}+\cdots\right)x&=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos O\left(\frac{1}{n}\right)x+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin O\left(\frac{1}{n}\right)x\\&=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+O\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+\dfrac{1}{2}+\cdots}&=\left(\frac{1}{n+\dfrac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{1+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}\right)=\frac{1}{n+\dfrac{1}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=\frac{1}{n+\dfrac{1}{2}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

故

$$\psi_n(x)=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{n+\dfrac{1}{2}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\begin{aligned}\alpha_n^2&=\int_0^\pi\psi_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2}\int_0^\pi\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_n}&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{1+O\left(\dfrac{1}{n}\right)}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)+O(1),\end{aligned}$$

所以规范化了的特征函数有渐近式

$$\nu_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

假设 $h=\infty, H=\infty$, 边条件变成 $f(0)=f(\pi)=0$. $\psi(x,\lambda)$ 满足第 1 个边条件, 让它也满足第 2 个边条件得特征值满足的方程

$$\sin s\pi+\int_0^\pi \sin s(\pi-\tau)\, q(\tau)\, \psi(\tau,\lambda)\mathrm{d}\tau=0,$$

由引理 2.1.2 得

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

代入积分得

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \sin s(\pi-\tau)q(\tau)\left(\frac{\sin s\tau}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\mathrm{d}\tau\\ =&\frac{1}{s}\sin s\pi\int_0^\pi \sin s\tau\cos s\tau\; q(\tau)\,\mathrm{d}\tau-\frac{1}{s}\cos s\pi\int_0^\pi \sin^2 s\tau q(\tau)\mathrm{d}\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\\ =&\frac{1}{2s}\sin s\pi\int_0^\pi q(\tau)\sin 2s\tau\;\mathrm{d}\tau-\frac{\cos s\pi}{s}\int_0^\pi\frac{1-\cos 2s\tau}{2}q(\tau)\mathrm{d}\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\\ =&-\frac{\cos s\pi}{2s}\int_0^\pi q(\tau)\mathrm{d}\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right),\end{aligned}$$

故特征值满足的方程是

$$\sin s\pi-\frac{\alpha}{s}\cos s\pi+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=0,\quad \alpha=\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

即

$$\sin s\pi=\left(\frac{\alpha}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\cos s\pi=O\left(\frac{1}{s}\right).$$

当 s 很大时, 有

$$s\sim n,$$

因此存在着无穷多个特征值, 对 s 求导数, 再让 $s=n$ 得

$$\pi\cos s\pi+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\Big|_{s=n}\neq 0,$$

这说明特征值重数为 1. 令 $s_n=n+\delta_n$, 则

$$\tan(n+\delta_n)\pi = \frac{\alpha}{n+\delta_n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\alpha}{n}\frac{1}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\tan\delta_n\pi = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\delta_n\pi = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \delta_n = \frac{\alpha}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以

$$s_n = n + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

其中, $\alpha_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. 类似地,

$$\psi_n(x) = \psi(x,\lambda_n) = \frac{\sin\left(n+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)x}{n+O\left(\frac{1}{n}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\sin\left(n+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)x = \sin nx\cos O\left(\frac{1}{n}\right)x + \cos nx\sin O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right)\cos nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\frac{1}{n+O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \frac{1}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以

$$\psi_n(x) = \frac{\sin nx}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \psi_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_0^\pi \sin^2 nx\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

故规范化了的特征函数有渐近式

$$\nu_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

从以上的讨论可见, 特征值是整函数的零点.

表 2.1

$h \neq \infty, H \neq \infty$	$h = \infty, H \neq \infty$	$h \neq \infty, H = \infty$	$h = \infty, H = \infty$
$\varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda) = 0$	$\psi'(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda) = 0$	$\varphi(\pi,\lambda) = 0$	$\psi(\pi,\lambda) = 0$
$s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$	$s_n = n + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$	$s_n = n + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$	$s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$
$\nu_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ $+O\left(\frac{1}{n}\right)$	$\nu_n(x)$ $= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(n+\frac{1}{2})x$ $+O\left(\frac{1}{n}\right)$	$\nu_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n+\frac{1}{2})x$ $+O\left(\frac{1}{n}\right)$	$\nu_n(x)$ $= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$ $+O\left(\frac{1}{n}\right)$

因为特征值是实的, 所以这些乃是不恒为零的整函数的实的零点, 由于整函数的零点至多可数, 且零点没有有限的聚点, 故特征值至多可数, 特征值没有有限聚点. 进一步利用了渐近式可得: T 存在可数个特征值, 没有有限聚点, 并且大的特征值是一重的.

2.2　特征函数的零点

Sturm 对特征函数的零点分布作了深入的研究, 从而找到了 T 存在着可数多个特征值的另一个证明 (1836 年) . 先看一个简单的例子, 考虑

$$M = -D^2, \quad x \in [0,\pi].$$

设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) | f'(0) = f'(\pi) = 0\},$$

显然 T 的特征值是

$$0,\ 1,\ 2^2,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots,$$

对应的特征函数是

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \cdots.$$

$\cos nx$ 的周期为 $\frac{2\pi}{n}$, 它在 $[0, 2\pi]$ 上有 $2n$ 个零点, 所以在 $[0,\pi]$ 上有 n 个零点. 如果 α, β 是它的两个相邻的零点,

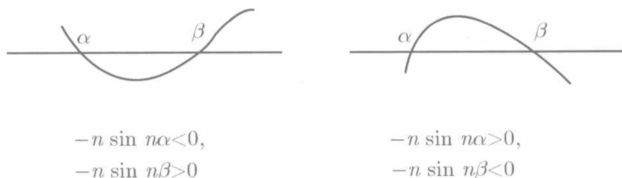


图 2.1

对 $\cos(n+1)x=\cos nx\cos x-\sin nx\sin x$, 有

$$\cos(n+1)\alpha=-\sin n\alpha\sin\alpha,$$

$$\cos(n+1)\beta=-\sin n\beta\sin\beta,$$

$$\cos(n+1)\alpha\cos(n+1)\beta<0,$$

所以 α,β 间有 $\cos(n+1)x$ 的一个零点. 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $\cos nx$ 的 n 个零点 (按顺序排列), 因为 $\cos n0=1,\cos nx$ 在 $[0,\alpha_1]$ 上下降, 于是 $\cos(n+1)\alpha_1<0(\cos nx$ 在 α_1 下降, $-n\sin n\alpha_1<0)$, $\cos(n+1)x$ 在 $(0,\alpha_1)$ 上有一个零点.

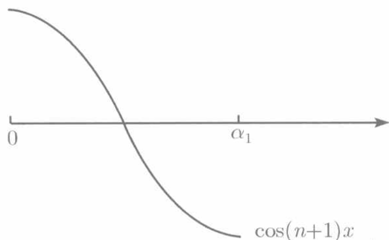


图 2.2

当 n 是偶数时, $\cos(n+1)\alpha_n>0$, $\cos(n+1)\pi=-1$, $\cos(n+1)x$ 在 (α_n,π) 上有一个零点;



图 2.3

当 n 是奇数时, $\cos(n+1)\alpha_n<0$, $\cos(n+1)\pi=1$, $\cos(n+1)x$ 在 (α_n,π) 上有一个零点.

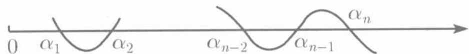


图 2.4

这样便得到下列结论:

(1) 第 n 个特征函数 $\cos nx$ 在 $[0,\pi]$ 上有 n 个零点;

(2) 第 $n+1$ 个特征函数 $\cos(n+1)x$ 的零点与第 n 个特征函数 $\cos nx$ 的零点交错出现.

Sturm 证明了这是特征函数具有的一般的性质.

定理 2.2.1　设

(1) $g(x) < h(x), \quad x \in [a,b]$;

(2) u, v 是满足微分方程

$$u'' + gu = 0, \quad v'' + hv = 0$$

的非平凡解, 则 u 的两个相邻的零点之间至少有 v 的一个零点.

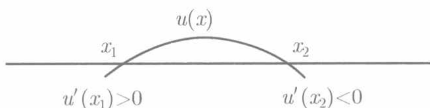


图 2.5

证明　$(u'v - uv')' = u''v - uv'' = (h-g)uv$, 设 x_1, x_2 是 u 的两个相邻的零点, 若 v 在 (x_1, x_2) 上不为零, 不妨假设 u, v 在 (x_1, x_2) 上恒正, 则由

$$(u'v - uv')|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (h-g)uv\mathrm{d}x$$

得

$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) > 0.$$

(由唯一性定理, $u'(x_1), u'(x_2) \neq 0$) 因为

$$v(x_1), v(x_2) \geqslant 0,$$

所以又有

$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) \leqslant 0,$$

矛盾!

推论 2.2.1　设 $g(x) < -m^2 < 0, x \in [a,b]$, 则 $y'' + g(x)y = 0, x \in [a,b]$ 的任何解至多有一个零点 (即解没有振动性质).

证明　因为 $y'' - m^2 y = 0$ 的解 $y = \mathrm{e}^{mx}$ 没有零点, 所以结论成立.

定理 2.2.2(比较定理)　设

(1) $g(x) < h(x), x \in [a,b]$;

(2) $u(x), v(x)$ 分别满足

$$\begin{cases} u''(x) + g(x)u(x) = 0, \\ u(a) = \sin\alpha, \\ u'(a) = -\cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} v''(x) + h(x)v(x) = 0, \\ v(a) = \sin\alpha, \\ v'(a) = -\cos\alpha, \end{cases} \qquad x \in [a,b],$$

则若 $u(x)$ 在 $(a,b]$ 上有 m 个零点, $v(x)$ 在 $(a,b]$ 上的零点必不少于 m 个, 且 $v(x)$ 的第 k 个零点小于 $u(x)$ 的第 k 个零点.

证明 (1) 非平凡解的零点是孤立的.

如果 x_0 是不孤立的零点, 则 $u(x_0)=0$ 且存在 $\{x_n\}$, 使得 $u(x_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 因此

$$u'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{u(x_n)-u(x_0)}{x_n-x_0}=0.$$

由唯一性得 $u(x)\equiv 0$, 矛盾!

(2) 由于零点孤立, 在 $(a,b]$ 上存在 $u(x)$ 的最靠近 a 的零点 x_1. 利用定理 2.2.1 的结论, 只需再证明 v 在 (a,x_1) 上有一个零点即可.

设 $v(x)$ 在 (a,x_1) 上不变号, 不妨假定 $u(x),v(x)$ 在 (a,x_1) 上为正,

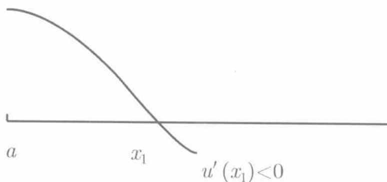


图 2.6

$$\begin{aligned}0&<\int_a^{x_1}(h(x)-g(x))u(x)v(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^{x_1}(u'(x)v(x)-u(x)v'(x))'\mathrm{d}x\\&=(u'(x)v(x)-u(x)v'(x))|_a^{x_1}=u'(x_1)v(x_1)\\&\leqslant 0,\end{aligned}$$

矛盾!

解的振动性质是二阶 Sturm-Liouville 型微分方程的一个重要性质, 关于这个性质在各个方面的推广:

(1) 推广到非对称情形;

(2) 推广到高阶情形;

(3) 推广到偏微分方程情形;

(4) 推广到一般的算子以及它与其他分析分支的联系.

参见 Kreith 的讲义 Oscillation Theory, Lecture Notes No.324, 1973, 这方面尚有不少问题有待研究.

下面利用 1926 年 Prüfer 引进的所谓 Prüfer 变换来证明 T 有可数个特征值. 考虑方程

$$-y''+qy=0,\quad x\in[a,b],\ q\text{ 连续}$$

的非平凡解. 则

$$\rho^2(x)=y^2(x)+y'^2(x)\neq 0,\quad x\in[a,b],$$

$$\begin{cases} y(x) = \rho(x)\sin\theta(x), \\ y'(x) = \rho(x)\cos\theta(x). \end{cases}$$

显然, $y(x)$ 的零点就是使 $\theta(x) = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ 的点. 所以应当着重考虑 $\theta(x)$ 的变化. 代入微分方程

$$\begin{cases} -\rho'(x)\cos\theta(x) + \rho(x)\sin\theta(x)\theta'(x) + q(x)\rho(x)\sin\theta(x) = 0, \\ \rho'(x)\sin\theta(x) + \rho(x)\cos\theta(x)\theta'(x) = \rho(x)\cos\theta(x), \end{cases}$$

解出导数

$$\begin{cases} \rho'(x) = q(x)\rho(x)\sin\theta(x)\cos\theta(x) + \rho(x)\sin\theta(x)\cos\theta(x) = \dfrac{1}{2}(1+q(x))\rho(x)\sin 2\theta(x), \\ \theta'(x) = \dfrac{1}{\rho(x)}(\rho(x)\cos^2\theta(x) - q(x)\rho(x)\sin^2\theta(x)) = \cos^2\theta(x) - q(x)\sin^2\theta(x), \end{cases}$$

第 2 个方程是 $\theta(x)$ 的一阶非线性方程,

$$\theta' = \cos^2\theta - q(x)\sin^2\theta,$$

右边的函数 $f(x,\theta) = \cos^2\theta - q(x)\sin^2\theta$ 连续, 而

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = -2\cos\theta\sin\theta - q(x)2\sin\theta\cos\theta = -(q(x)+1)\sin 2\theta$$

有界, 所以 f 关于 θ 满足 Lipschitz 条件, 故在 $[a,b]$ 上的 Cauchy 问题有唯一的解.

引理 2.2.1　设 θ_1 和 θ_2 分别是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \theta' = \cos^2\theta - q_1(x)\sin^2\theta, \\ \theta(a) = \alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta' = \cos^2\theta - q_2(x)\sin^2\theta, \\ \theta(a) = \beta \end{cases}$$

的解, $\alpha \leqslant \beta, q_1(x) > q_2(x), x \in [a,b]$, 则

$$\theta_1(x) < \theta_2(x), \quad x \in (a,b].$$

证明　在 $x = a$ 处有 3 种可能.

(1) $\alpha < \beta$;

(2) $\alpha = \beta \neq 0(\mathrm{mod}\pi)$;

(3) $\alpha = \beta = 0(\mathrm{mod}\pi)$.

对于情形 (1), 因为 $\alpha < \beta$, 所以由连续函数的保号性, 易证在 a 的某右邻域 $(a, a+\delta)$ 上, $\theta_1 < \theta_2$;

对于情形 (2), 因为 $\alpha = \beta \neq 0(\mathrm{mod}\pi)$,

$$\theta_1'(a) = \cos^2\alpha - q_1(a)\sin^2\alpha < \cos^2\alpha - q_2(a)\sin^2\alpha = \cos^2\beta - q_2(a)\sin^2\beta = \theta_2'(a),$$

所以存在区间 $(a, a+\delta)$, 使得

$$\theta_1(x) < \theta_2(x), \quad x \in (a, a+\delta).$$

如果 $\theta_1(a+\delta) < \theta_2(a+\delta)$, 还可以用这个方法向右延展开去, 如果 $\theta_1(a+\delta) = \theta_2(a+\delta)$, 设 $\theta_1(a+\delta) = \theta_2(a+\delta) \neq 0(\mathrm{mod}\pi)$, 则

$$\theta_1'(a+\delta) < \theta_2'(a+\delta).$$

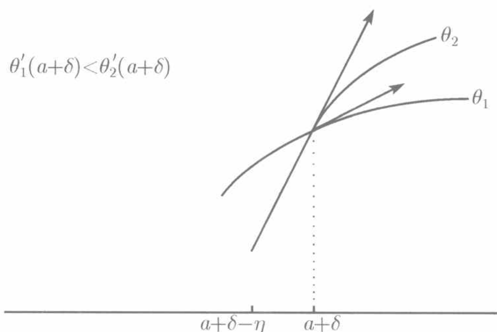


图 2.7

于是存在区间 $(a+\delta-\eta, a+\delta)$, 使得在此区间上

$$\theta_2(x) < \theta_1(x),$$

矛盾! 故必然 $\theta_1(a+\delta) = \theta_2(a+\delta) = 0\,(\mathrm{mod}\pi)$, 问题变为情形 (3). 记 $c = a+\delta$, 则

$$\theta_1'(c) = \theta_2'(c) = 1.$$

这样在 c 点附近, 在 Taylor 展开中丢掉高阶项, $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ 近似相等, 数值约为

$$k\pi + (x-c).$$

那么在 c 点附近, 丢掉高阶项以后将有

$$\begin{aligned}\theta_2'(x) - \theta_1'(x) &\approx q_1(x)\sin^2(k\pi + (x-c)) - q_2(x)\sin^2(k\pi + (x-c)) \\ &\approx (q_1(c) - q_2(c))(x-c)^2.\end{aligned}$$

这样就存在 c 的邻域, 使得

$$\theta_2'(x) - \theta_1'(x) > 0.$$

(i) 如果 $c = a$, 则

$$\theta_2(x) > \theta_1(x), \quad x \in (a, a+\varepsilon);$$

(ii) 如果 $c = a+\delta$, 则由前面的推理, 将有

$$\theta_2(x) < \theta_1(x), \quad x \in (a+\delta-\varepsilon, a+\delta).$$

矛盾! 所以不可能有 $c=a+\delta$.

引理 2.2.2　设 $q(x,\lambda)$ 是 $[a,b]\times\mathbf{R}$ 上的连续函数, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}q(x,\lambda)=-\infty$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}q(x,\lambda)=\infty$ 关于 $x\in[a,b]$ 一致成立, $\theta(x,\lambda)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\theta'=\cos^2\theta+q(x,\lambda)\sin^2\theta,\\ \theta(a)=\alpha\in[0,\pi)\end{cases}$$

的解, 则 $\theta(x,\lambda)\geqslant 0$, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\theta(b,\lambda)=0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\theta(b,\lambda)=\infty$.

证明　(1) $\theta(x,\lambda)\geqslant 0$.

若 $\theta(a)>0$, 则在某个区间 $(a,a+\delta)$ 上 $\theta(x,\lambda)>0$. 当 $\theta(a)=0$ 时, 因为

$$\theta'(a,\lambda)=1,$$

所以也有此结论. 如果 $\theta(x,\lambda)$ 在 $(a,b]$ 上不正, 必有 $c\in(a,b)$ 使得在 (a,c) 上, $\theta>0$, 但

$$\theta\left(c,\lambda\right)=0,$$

于是

$$\theta'\left(c,\lambda\right)=1,$$



图 2.8

存在某个区间 $(c,c+\eta)$, 使得

$$\theta(x,\lambda)>0,\quad x\in(c,c+\eta),$$

因此总有

$$\theta(x,\lambda)\geqslant 0,\quad x\in[a,b].$$

(2) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\theta\left(b,\lambda\right)=0$.

任取 $0<B<\pi$, 取 A 满足 $\alpha<A<\pi$, 作联结 $(a,A),(b,B)$ 的直线 $\theta_0(x)$ 如图 2.9, 因为 $\sin\theta_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正的下界, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}q(x,\lambda)=-\infty$ 对 $x\in[a,b]$ 一致成立, 所以存在 λ_0, 使得当 $\lambda<\lambda_0$ 时有

$$\cos^2\theta_0(x)+q(x,\lambda)\sin^2\theta_0(x)<\frac{B-A}{b-a},\quad x\in[a,b].$$

考虑 $\theta(x,\lambda)$, $(x,\lambda)\in[a,b]\times(-\infty,\lambda_0)$, 这时必有 $\theta(x,\lambda)<\theta_0(x)$, 否则应有一处相交, 在相交点上, 曲线 $\theta(x,\lambda)$ 的斜率将 $\geqslant\dfrac{B-A}{b-a}$, 可是在该点上,

$$\theta'(x)=\cos^2\theta(x)+q(x,\lambda)\sin^2\theta(x)=\cos^2\theta_0(x)+q(x,\lambda)\sin^2\theta_0(x)<\frac{B-A}{b-a},$$

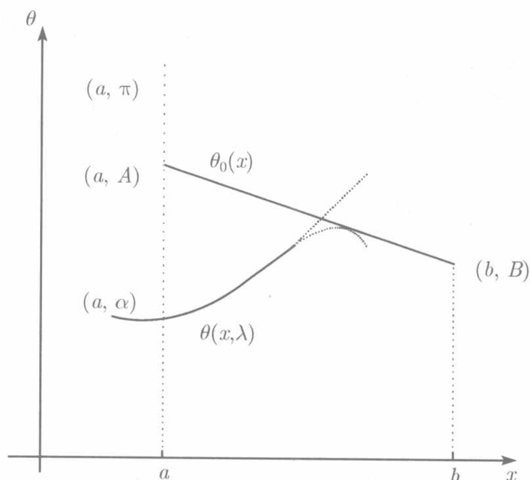


图 2.9

矛盾! 所以, 当 $\lambda < \lambda_0$ 时, 由 (1) 有

$$0 \leqslant \theta(b, \lambda) < B.$$

由于 B 是任意的, 故

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \theta(b, \lambda) = 0.$$

(3) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \theta(b, \lambda) = \infty$.

因为 $\lim\limits_{\lambda \to \infty} q(x, \lambda) = \infty$ 对 $x \in [a, b]$ 一致成立, 故对任意的 $M > 0$ 存在 λ_1, 使得当 $\lambda > \lambda_1$ 时, $q(x, \lambda) > M$ 且

$$\cos^2 \theta(x, \lambda) + q(x, \lambda) \sin^2 \theta(x, \lambda) > 0, \quad x \in [a, b].$$

于是当 $(x, \lambda) \in [a, b] \times (\lambda_1, \infty)$ 时, $\theta'(x, \lambda) > 0$, 即当 $\lambda > \lambda_1$ 时, $\theta(x, \lambda)$ 是 x 的增函数. 这时, 固定 $\lambda > \lambda_1$, $[a, b]$ 是两个不相交的集合的并,

$$U_\lambda = \left\{ x \in [a, b] \middle| |\sin \theta(x, \lambda)| > M^{-\frac{1}{3}} \right\},$$

$$V_\lambda = \left\{ x \in [a, b] \middle| |\sin \theta(x, \lambda)| \leqslant M^{-\frac{1}{3}} \right\}.$$

前者是一些开区间的并, 后者是一些闭区间的并, 这两类区间是相互交错的, 下面来估计这种小区间的长度. 对任何 $x \in U_\lambda$ 都有

$$\theta'(x, \lambda) > M^{\frac{1}{3}}.$$

在各个小区间上, $\theta(x,\lambda)$ 的变化小于 π, M 越大, 变化范围也就越接近 π. 由中值定理, 这种小区间的长度有估计

$$\frac{\pi}{\eta-\xi} > \frac{\theta(\eta,\lambda)-\theta(\xi,\lambda)}{\eta-\xi} = \theta'(x_0,\lambda) \geqslant M^{\frac{1}{3}},$$

$$\eta-\xi < \pi M^{-\frac{1}{3}}.$$

而对任何 $x\in V_\lambda$ 都有

$$\theta'(x,\lambda) = \left(1-\sin^2\theta(x,\lambda)\right) + q(x,\lambda)\sin^2\theta(x,\lambda) > 1-M^{-\frac{2}{3}}.$$

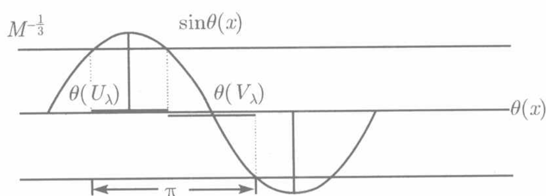


图 2.10

当 M 充分大时, $\theta(x,\lambda)$ 在某 $n\pi$ 附近变化, 所以在这种小区间上, $\theta(x,\lambda)$ 在正弦的一个单值分支的定义域内. 所以

$$\begin{aligned}\theta(\eta,\lambda)-\theta(\xi,\lambda) &= (-1)^{n-1}n\pi - \arcsin(\sin\theta(\eta,\lambda)) - (-1)^{n-1}n\pi + \arcsin(\sin\theta(\xi,\lambda))\\ &= \arcsin(\sin\theta(\xi,\lambda)) - \arcsin(\sin\theta(\eta,\lambda)) \leqslant 2\arcsin M^{-\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

由

$$\frac{\theta(\eta,\lambda)-\theta(\xi,\lambda)}{\eta-\xi} = \theta'(x_0,\lambda) > 1-M^{-\frac{2}{3}}$$

得这种子区间的长度

$$\eta-\xi < \left(1-M^{-\frac{2}{3}}\right)^{-1}(\theta(\eta,\lambda)-\theta(\xi,\lambda)) \leqslant \left(1-M^{-\frac{2}{3}}\right)^{-1} 2\arcsin M^{-\frac{1}{3}}.$$

由于

$$\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M^{\frac{1}{3}}} = 0, \quad \lim_{M\to\infty}\frac{2\arcsin M^{-\frac{1}{3}}}{1-M^{-\frac{2}{3}}} = 0,$$

所以 M 越大, $[a,b]$ 上这种交错子区间的对数 $n(M)$ 就越多, $\lim\limits_{M\to\infty} n(M)=\infty$. 每经过一对这样的子区间, $\theta(x,\lambda)$ 就要相差一个 π, 因为 $\theta(x,\lambda)$ 是 x 的增函数, 故当 $\lambda>\lambda_1$ 时,

$$\theta(b,\lambda)-\theta(a,\lambda) > n(M)\pi.$$

因此

$$\lim_{\lambda\to\infty}\theta(b,\lambda) = \infty.$$

定理 2.2.3 设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) | f(0)\cos\alpha - f'(0)\sin\alpha = 0, f(\pi)\cos\beta - f'(\pi)\sin\beta = 0\},$$

$$0 \leqslant \alpha < \pi, \quad 0 < \beta \leqslant \pi,$$

则

(1) T 有可数多个特征值

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty;$$

(2) 对应于 λ_n 的规范化特征函数 $\varphi_n(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 n 个简单零点.

证明 令

$$\begin{cases} y(x,\lambda) = \rho(x,\lambda)\sin\theta(x,\lambda), \\ y'(x,\lambda) = \rho(x,\lambda)\cos\theta(x,\lambda), \end{cases}$$

其中, $y(x,\lambda)$ 满足

$$-y'' + qy = \lambda y.$$

于是

$$\rho'(x,\lambda) = \frac{1}{2}(1 + q(x) - \lambda)\rho(x,\lambda)\sin 2\theta(x,\lambda),$$

$$\theta'(x,\lambda) = \cos^2\theta(x,\lambda) + (\lambda - q(x))\sin^2\theta(x,\lambda).$$

初始条件 $\theta(0,\lambda) = \alpha$ 唯一确定了 $\theta(x,\lambda)$, 由引理 2.2.1, 它是 λ 的增函数; 由引理 2.2.2, 它非负且

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \theta(\pi,\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \theta(\pi,\lambda) = \infty.$$

由于有了 $\theta(x,\lambda)$, 从 ρ 的微分方程可解得

$$\ln\rho(x,\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^x (1 + q(t) - \lambda)\sin 2\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t,$$

$$\ln\rho(0,\lambda) = 0, \quad \rho(0,\lambda) = 1,$$

$$\rho(x,\lambda) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^x (1+q(t)-\lambda)\sin 2\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t}.$$

当 λ 固定时, $\rho(x,\lambda)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 有正的下界.

$$y(x,\lambda) = \rho(x,\lambda)\sin\theta(x,\lambda)$$

满足

$$-y'' + qy = \lambda y$$

且

$$y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = \sin\theta(0,\lambda)\cos\alpha - \cos\theta(0,\lambda)\sin\alpha = \sin(\theta(0,\lambda)-\alpha) = 0,$$

代入第 2 个边条件

$$\begin{aligned} y(\pi)\cos\beta - y'(\pi)\sin\beta &= \rho(\pi,\lambda)(\sin\theta(\pi,\lambda)\cos\beta - \cos\theta(\pi,\lambda)\sin\beta) \\ &= \rho(\pi,\lambda)\sin(\theta(\pi,\lambda)-\beta). \end{aligned}$$

如果能找到 λ_n, 使得 $\theta(\pi,\lambda_n) = \beta + n\pi$, $n = 0,1,2,\cdots$ (因为 $\theta(x,\lambda) > 0$, $0 < \beta \leqslant \pi$ 所以 n 只好取非负整数), 则 $y(x,\lambda_n)$ 也满足第 2 个边条件, 因而 λ_n 是特征值而 $y(x,\lambda_n)$ 是特征函数.

事实上, $\theta(\pi,\lambda)$ 是 λ 的严格增函数, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\theta(\pi,\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\theta(\pi,\lambda) = \infty$, 所以方程 $\theta(\pi,\lambda) = \beta + n\pi$ 有唯一解 λ_n, 这样, 由单调性和 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\theta(\pi,\lambda) = \infty$ 便可以得出无穷多个特征值 λ_n 满足

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty.$$

对每个 λ_n, 特征函数是 $y(x,\lambda_n) = \rho(x,\lambda_n)\sin\theta(x,\lambda_n)$, 以 $\varphi_n(x)$ 表示它的规范化. 下面考虑 $\varphi_n(x)$ 的零点. 因为 $\rho(x,\lambda_n)$ 有正的下界, 所以 $\varphi_n(x)$ 的零点是使 $\theta(x,\lambda_n) = 0(\mathrm{mod}\pi)$ 的点, 在这种点上

$$\varphi_n'(x) = c_n y'(x,\lambda_n) = \pm c_n\rho(x,\lambda_n) \neq 0, \quad y'(x,\lambda_n) = \rho(x,\lambda_n)\cos\theta(x,\lambda_n),$$

因此零点是简单的. 如果

$$\theta(x_0,\lambda_n) = k\pi,$$

则

$$\theta'(x_0,\lambda_n) = 1.$$

所以 $\theta(x,\lambda_n)$ 在 x_0 关于 x 是增加的, 这样 $\theta(x,\lambda_n)$ 便只能取一次 $k\pi$ 这个值. 否则存在 $x_1 > x_0$ 使得 $\theta(x_1,\lambda_n) = k\pi$, 则 $\theta'(x_1,\lambda_n) < 0$, 这不可能! 当 $n > 0$ 时,

$$\theta(0,\lambda_n) = \alpha, \quad \theta(\pi,\lambda_n) = \beta + n\pi.$$

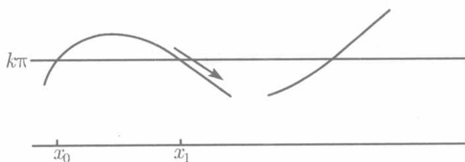


图 2.11

所以 $(\alpha, \beta + n\pi) \subset \theta(x, \lambda_n)$ 的值域. 因为

$$0 \leqslant \alpha < \pi, \quad 0 < \beta \leqslant \pi,$$

所以

$$\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots, n\pi \in (\alpha, \beta + n\pi),$$

于是 $\varphi_n(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上至少有 n 个零点.$\varphi_n(x)$ 又不能再有别的零点, 如果它还有一个零点 x_1, 则

$$\theta(x_1, \lambda_n) = k\pi, \quad k \geqslant n + 1.$$

于是由 $\theta'(x_1, \lambda_n) = 1$, $\theta(x, \lambda_n)$ 在这种点处关于 x 是增加的,

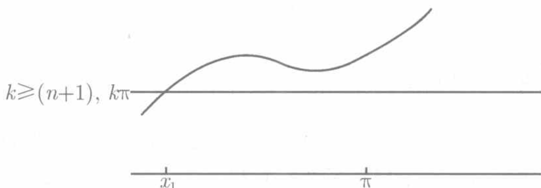


图 2.12

于是

$$(n+1)\pi \geqslant \beta + n\pi = \theta(\pi, \lambda_n) > \theta(x_1, \lambda_n) > (n+1)\pi,$$

矛盾! 所以 $\varphi_n(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有 n 个零点.

2.3 按特征函数的展开

这一部分要证明 T 的特征函数组成了平方可积的函数空间 $L^2[0, \pi]$ 的规范正交基, 由此便得到 T 的谱分解. 这便是 Hilbert-Steklov 的理论. 考虑微分算式

$$M = -D^2 + q, \quad x \in [0, \pi], \quad q\text{连续}.$$

设 T 是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓

$$\mathscr{D}(T) = \left\{ f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \,\middle|\, \begin{array}{l} l_1(f) = f(0)\cos\alpha - f'(0)\sin\alpha = 0, \\ l_2(f) = f(\pi)\cos\beta - f'(\pi)\sin\beta = 0 \end{array} \right\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

设 $\{\lambda_n | n = 1, 2, \cdots\}$ 是 T 的特征值, φ_n 是对应的规范化特征函数. 如果 $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 来证明 $\lambda \in \rho(T)$ 且 $R(\lambda, T)$ 是一个积分算子. 这样 $\sigma(T) = \sigma_p(T) =$

$\{\lambda_n | n = 1, 2, \cdots\}$. 下面来计算积分算子 $R(\lambda, T)$ 的核 ——Green 函数. 设 $f \in L^2[0, \pi]$, 下证

$$\begin{cases} \lambda y - My = f, \\ l_1(y) = l_2(y) = 0 \end{cases}$$

有唯一解. 设 $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)$ 分别满足

$$\begin{cases} My_1 = \lambda y_1, \\ y_1(0) = \sin\alpha, \\ y_1'(0) = \cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} My_2 = \lambda y_2, \\ y_2(\pi) = \sin\beta, \\ y_2'(\pi) = \cos\beta, \end{cases}$$

由定理 2.1.1, y_1, y_2 都是 λ 的整函数, 显然 $l_1(y_1) = 0, l_2(y_2) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda y_1 y_2 - \lambda y_1 y_2 = y_2 M y_1 - y_1 M y_2 = y_2(-y_1'' + q y_1) - y_1(-y_2'' + q y_2) \\ &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = (y_1 y_2' - y_1' y_2)', \end{aligned}$$

所以 $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ 与 x 无关, 它是 λ 的一个整函数, 记为 $\omega(\lambda)$, 当 $\lambda \neq \lambda_n, n = 1, 2, \cdots$ 时, y_1, y_2 线性无关, 于是 $\omega(\lambda) \neq 0$①. 这样, 非齐次微分方程边值问题的解 y 便可表示成 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_0$, 其中, y_0 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \lambda y - My = f, \\ y(0,\lambda) = y'(0,\lambda) = 0 \end{cases}$$

的解.

用常数变易法来求 y_0. 设 $y_0 = A y_1 + B y_2$, 则

$$\begin{aligned} y_0' &= A y_1' + B y_2', \quad A' y_1 + B' y_2 = 0, \\ y_0'' &= A' y_1' + B' y_2' + A y_1'' + B y_2'', \\ f &= \lambda y_0 - M y_0 = \lambda y_0 + y_0'' - q y_0 \\ &= \lambda (A y_1 + B y_2) + A' y_1' + B' y_2' + A y_1'' + B y_2'' - q(A y_1 + B y_2) \\ &= A' y_1' + B' y_2', \end{aligned}$$

由

$$\begin{cases} A' y_1 + B' y_2 = 0, \\ A' y_1' + B' y_2' = f \end{cases}$$

① 否则, 如果 $\omega(\lambda) = 0$, 则 $y_1(x,\lambda)$ 与 $y_2(x,\lambda)$ 相关, 所以 λ 是特征值, 因此

$$\lambda \text{ 是特征值} \Leftrightarrow \lambda \text{ 是 } \omega(\lambda) \text{ 的零点}.$$

这就给出了一个确定特征值的方法.

解得

$$A' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\omega(\lambda)} = -\frac{fy_2}{\omega(\lambda)},$$

$$B' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\omega(\lambda)} = \frac{fy_1}{\omega(\lambda)}.$$

于是

$$A = \int_0^x \left(\frac{-f(t)y_2(t,\lambda)}{\omega(\lambda)} \right) \mathrm{d}t + a,$$

$$B = \int_0^x \frac{f(t)y_1(t,\lambda)}{\omega(\lambda)} \mathrm{d}t + b.$$

这样

$$y_0 = ay_1 + by_2 + \int_0^x \frac{f(t)}{\omega(\lambda)} \left(y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda) - y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda) \right) \mathrm{d}t.$$

由

$$\begin{cases} 0 = y_0(0,\lambda) = ay_1(0,\lambda) + by_2(0,\lambda), \\ 0 = y_0'(0,\lambda) = ay_1'(0,\lambda) + by_2'(0,\lambda), \end{cases}$$

因为 $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)$ 线性无关, 故 $a = b = 0$, 所以

$$y_0(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\omega(\lambda)} \left(y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda) - y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda) \right) \mathrm{d}t.$$

现在再用边条件来定 c_1 与 c_2.

$$\begin{cases} 0 = l_1(y) = c_1 l_1(y_1) + c_2 l_1(y_2) + l_1(y_0) = c_2 l_1(y_2), \\ 0 = l_2(y) = c_1 l_2(y_1) + c_2 l_2(y_2) + l_2(y_0) = c_1 l_2(y_1) + l_2(y_0), \end{cases}$$

由于 λ 不是特征值, $l_1(y_2) \neq 0$, 故 $c_2 = 0$. 所以

$$c_1 \left(y_1(\pi,\lambda)\cos\beta - y_1'(\pi,\lambda)\sin\beta \right) + \frac{\cos\beta}{\omega(\lambda)} \int_0^\pi f(t) \left(y_1(t,\lambda)y_2(\pi,\lambda) - y_1(\pi,\lambda)y_2(t,\lambda) \right) \mathrm{d}t$$

$$-\frac{\sin\beta}{\omega(\lambda)} \int_0^\pi f(t) \left(y_1(t,\lambda)y_2'(\pi,\lambda) - y_1'(\pi,\lambda)y_2(t,\lambda) \right) \mathrm{d}t = 0,$$

而

$$\omega(\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(\pi,\lambda) & y_2(\pi,\lambda) \\ y_1'(\pi,\lambda) & y_2'(\pi,\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(\pi,\lambda) & \sin\beta \\ y_1'(\pi,\lambda) & \cos\beta \end{vmatrix} = y_1(\pi,\lambda)\cos\beta - y_1'(\pi,\lambda)\sin\beta,$$

$$l_2(y_2) = 0,$$

故

$$c_1\omega(\lambda)+\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^{\pi}(-y_1(\pi,\lambda)\cos\beta+y_1'(\pi,\lambda)\sin\beta)f(t)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t=0,$$

即

$$c_1\omega(\lambda)-\int_0^{\pi}f(t)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t=0,$$

$$c_1=\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^{\pi}f(t)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t.$$

这样便得

$$\begin{aligned}y(x,\lambda)=&\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^{\pi}f(t)y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t\\&+\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^{x}f(t)\left(y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda)-y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\right)\mathrm{d}t\\=&\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^{x}f(t)y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda)\mathrm{d}t+\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_x^{\pi}f(t)y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t\\=&\int_0^{\pi}G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中,

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}, & t\leqslant x,\\[2mm]\dfrac{y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda)}{\omega(\lambda)}, & t\geqslant x.\end{cases}$$

这样边值问题的解便存在, 而且解必然唯一, 因为若 y 与 $\widetilde{y}$ 都是解, 则 $y-\widetilde{y}$ 满足

$$\begin{cases}Mz=\lambda z,\\ l_1(z)=l_2(z)=0.\end{cases}$$

由于 λ 不是特征值, 它只有零解, 于是 $y=\widetilde{y}$.

显然 $G(x,t,\lambda)$ 有下列性质:

(1) $G(x,t,\lambda)$ 是 $\{(x,t)|0\leqslant x,t\leqslant\pi\}$ 上的连续函数;

(2)

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t+0,t,\lambda)-\frac{\partial G}{\partial x}(t-0,t,\lambda)=\frac{y_1(t,\lambda)y_2'(t,\lambda)}{\omega(\lambda)}-\frac{y_1'(t,\lambda)y_2(t,\lambda)}{\omega(\lambda)}=1;$$

(3) 对固定的 (x,t), $G(x,t,\lambda)$ 是 λ 的半纯函数, 特征值 $\lambda_n, n=1,2,\cdots$ 是它的简单极点 (特征值是一重的);

(4) $G(x,t,\lambda)=G(t,x,\lambda)$;

(5) 因为 $y_i(x,\overline{\lambda})=\overline{y_i(x,\lambda)}$, $i=1,2$, 所以 $\omega\left(\overline{\lambda}\right)=\overline{\omega(\lambda)}$. 于是

$$G(x,t,\overline{\lambda})=\overline{G(x,t,\lambda)}.$$

如果 λ 是实的, 则 $y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda)$ 可取为实的, 于是 $\omega(\lambda)$ 也是实的, 因此 $G(x,t,\lambda)$ 是实的.

(6) 作为 x 的连续函数, 当 $x\neq t$ 时, $MG=\lambda G$ 且 $l_1(G)=l_2(G)=0$.

称 $G(x,t,\lambda)$ 为边值问题

$$\begin{cases}\lambda y-My=f,\\ l_1(y)=l_2(y)=0\end{cases}$$

的 Green 函数.

从以上的计算, 得到

定理 2.3.1 如果 λ 不是特征值, 则对任何 $f\in L^2[0,\pi]$, 存在唯一的 $y\in\mathscr{D}(T)$, 使得

$$\lambda y-My=f$$

且

$$y(x,\lambda)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t.$$

换句话说, $\lambda\in\rho(T)$ 并且 $R(\lambda,T)$ 是以 Green 函数为核的积分算子.

定义 2.3.1 设 H 是 Hilbert 空间, Ω 是测度空间, $T:H\to L^2(\Omega)$ 是线性算子. 如果存在抽象函数 $K:\Omega\to H$, 使得对一切 $f\in\mathscr{D}(T)$, $(Tf)(x)=(K(x),\overline{f})$ 关于 $x\in\Omega$ 几乎处处成立, $(\cdot,\cdot)$ 是 H 里的内积, 则称 T 是一个 Carleman 算子.

在这里, $H=L^2[0,\pi]$, $\Omega=[0,\pi]$,

$$K(x)=G(x,\cdot,\lambda),$$

$$\left(R(\lambda,T)f\right)(x)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t=\left(K(x),\overline{f}\right),$$

所以 $R(\lambda,T)$ 是一个 Carleman 算子. 实际上, 由于 G 是二元连续函数, 属于 $L^2([0,\pi]\times[0,\pi])$, $R(\lambda,T)$ 是个 Hilbert-Schmidt 算子, 因而 $R(\lambda,T)$ 还是紧算子.

定理 2.3.1 的证明

G 在 $\{(x,t)|0\leqslant x,t\leqslant\pi\}$ 上连续, $f\in L^2[0,\pi]$, 所以积分

$$y(x,\lambda)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t$$

存在, 由于 G 满足边条件, 故

$$l_1(y)=l_2(y)=0.$$

下面验证它满足方程

$$
\begin{aligned}
y(x,\lambda) &= \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^x f(t)y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda)\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi f(t)y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t,\\
y'(x,\lambda) &= \frac{1}{\omega(\lambda)}f(x)y_1(x,\lambda)y_2(x,\lambda) + \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^x f(t)y_1(t,\lambda)y_2'(x,\lambda)\mathrm{d}t\\
&\quad -\frac{1}{\omega(\lambda)}f(x)y_1(x,\lambda)y_2(x,\lambda) + \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi f(t)y_1'(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^x f(t)y_1(t,\lambda)y_2'(x,\lambda)\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi f(t)y_1'(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t,\\
y''(x,\lambda) &= \frac{1}{\omega(\lambda)}f(x)y_1(x,\lambda)y_2'(x,\lambda) + \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^x f(t)y_1(t,\lambda)y_2''(x,\lambda)\mathrm{d}t\\
&\quad -\frac{1}{\omega(\lambda)}f(x)y_1'(x,\lambda)y_2(x,\lambda) + \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi f(t)y_1''(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t\\
&= f(x) + \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^x f(t)y_1(t,\lambda)y_2''(x,\lambda)\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi f(t)y_1''(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda y(x,\lambda) - My(x,\lambda) &= \frac{\lambda}{\omega(\lambda)}\int_0^x f(t)y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda)\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi f(t)y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t\\
&\quad + f(x) + \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^x f(t)y_1(t,\lambda)y_2''(x,\lambda)\mathrm{d}t\\
&\quad + \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi f(t)y_1''(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t\\
&\quad - q(x)\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^x f(t)y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda)\mathrm{d}t\\
&\quad - q(x)\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi f(t)y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^x f(t)y_1(t,\lambda)\left(\lambda y_2(x,\lambda) + y_2''(x,\lambda) - q(x)y_2(x,\lambda)\right)\mathrm{d}t\\
&\quad + \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi f(t)y_2(t,\lambda)\left(\lambda y_1(x,\lambda) + y_1''(x,\lambda) - q(x)y_1(x,\lambda)\right)\mathrm{d}t + f(x)\\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

推论 2.3.1　T 有纯点谱.

推论 2.3.2　$\mathrm{res}_{\lambda_n} G = \varphi_n(x)\varphi_n(t)$.

证明　因为 λ_n 是 $\omega(\lambda)$ 的简单零点, 所以

$$
\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)G(x,t,\lambda) = cy_1(t,\lambda_n)y_2(x,\lambda_n) = \widetilde{c}\varphi_n(x)\varphi_n(t).
$$

下面来定 $\widetilde{c}$. 因为 $\dfrac{1}{\lambda-\lambda_n}y_2(x,\lambda_n)$ 满足 2 个边条件且

$$(\lambda-M)\frac{1}{\lambda-\lambda_n}y_2(x,\lambda_n)=(\lambda-\lambda_n)\frac{1}{\lambda-\lambda_n}y_2(x,\lambda_n)=y_2(x,\lambda_n),$$

所以

$$\frac{y_2(x,\lambda_n)}{\lambda-\lambda_n}=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)y_2(t,\lambda_n)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^\pi(\lambda-\lambda_n)\,G(x,t,\lambda)y_2(t,\lambda_n)\,\mathrm{d}t=y_2(x,\lambda_n).$$

让 $\lambda\to\lambda_n$, 则有

$$\int_0^\pi\widetilde{c}\varphi_n(x)\varphi_n(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t=\varphi_n(x),$$

$$\widetilde{c}\varphi_n(x)=\varphi_n(x),$$

所以 $\widetilde{c}=1$.

从 2.1 节得到的特征值的渐进估计知

$$\lambda_n=s_n^2,\quad s_n=O(n),$$

所以

$$\lambda_n=O\left(n^2\right).$$

于是可以考虑级数

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=1}^\infty\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda-\lambda_n},$$

由引理 2.1.2, $\varphi_n(x)$ 关于 n 有界, 所以级数在

$$\{(x,t)|0\leqslant x,t\leqslant\pi\}\times\{\lambda|\lambda\neq\lambda_n,n=1,2,\cdots\}$$

上绝对收敛. 如果 (x,t) 固定, $\lambda\neq\lambda_n,n=1,2,\cdots$, 则 $R(x,t,\lambda)$ 在 λ 处解析. 因为存在闭圆

$$B_\delta(\lambda)=\{\mu|\,|\mu-\lambda|\leqslant\delta\},$$

使得

$$B_\delta(\lambda)\cap\{\lambda_n|n=1,2,\cdots\}=\varnothing$$

每一个 $\dfrac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\mu-\lambda_n}$ 在 $B_\delta(\lambda)$ 上解析, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$, 所以存在 n_0, 当 $n\geqslant n_0$ 时,

$$|\lambda-\lambda_n|\geqslant\lambda_n-|\lambda|>\delta.$$

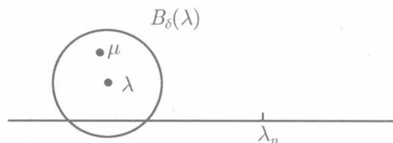


图 2.13

于是

$$|\mu-\lambda_n|\geqslant|\lambda-\lambda_n|-|\lambda-\mu|>|\lambda-\lambda_n|-\delta\geqslant\lambda_n-|\lambda|-\delta,$$

$$\frac{|\varphi_n(x)\varphi_n(t)|}{|\mu-\lambda_n|}\leqslant\frac{c}{\lambda_n-|\lambda|-\delta}.$$

这样级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\mu-\lambda_n}$ 便在 $B_\delta(\lambda)$ 上一致收敛, 所以 $R(x,t,\mu)$ 在 $B_\delta(\lambda)$ 上解析. 于是 $R(x,t,\lambda)$ 是 λ 的半纯函数, $\{\lambda_n|n=1,2,\cdots\}$ 是它的极点. 所以 $R(x,t,\lambda)$ 是 $G(x,t,\lambda)$ 的主要部分. 令

$$E(x,t,\lambda)=G(x,t,\lambda)-R(x,t,\lambda),$$

则 $E(x,t,\lambda)$ 是 λ 的整函数.

定理 2.3.2 $E(x,t,\lambda)\equiv 0$.

证明 因为 $E(x,t,\lambda)$ 是整函数, 所以只要证明 $\lambda\in\mathbf{R}\backslash\{\lambda_n|n=1,2,\cdots\}$ 时, $E(x,t,\lambda)=0$ 即可. 由于当 $\lambda\in\mathbf{R}\backslash\{\lambda_n|n=1,2,\cdots\}$ 时,

$$G(x,t,\lambda)=\overline{G(x,t,\lambda)}=\overline{G(t,x,\lambda)}$$

且 $G(x,t,\lambda)$ 在 $[0,\pi]\times[0,\pi]$ 上连续, 所以算子

$$(Ef)(x)=\int_0^\pi E(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t$$

是 $L^2[0,\pi]\to L^2[0,\pi]$ 的紧自伴算子. 如果 $E(x,t,\lambda)\neq 0$, E 是个非零算子, 必有非零的实特征值 $\mu(\|E\|\neq 0!)$, 设对应的特征向量为 h, 则 (可以假定 h 是实的!) $\int_0^\pi E(x,t,\lambda)h(t)\mathrm{d}t=\mu h(x)$, (由此可见 h 连续!) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda-\lambda_n|}<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda-\lambda_n}h(t)$ 当 x 固定时, 对 t 一致收敛, 因此可以逐项积分

$$\mu h(x)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)h(t)\mathrm{d}t-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(x),\quad h_n=\int_0^\pi h(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t.$$

这样两边乘以 $\varphi_m(x)$ 再积分

$$\int_0^\pi\varphi_m(x)\left(\int_0^\pi G(x,t,\lambda)h(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$=\mu\int_0^\pi h(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x+\int_0^\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x,$$

左边由于 G 连续, 二重积分绝对收敛, 可用 Fubini 定理. 而右边由于

$$|h_n| \leqslant \|h\| \|\varphi_n\| = \|h\|, \quad \lambda_n = O\left(n^2\right), |\varphi_n(x)| \leqslant c, x \in [0, \pi], n = 1, 2, \cdots,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x) \varphi_m(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上一致收敛, 可以逐项积分, 因此得

$$\int_0^{\pi} h(t) \left(\int_0^{\pi} G(x, t, \lambda) \varphi_m(x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \mu h_m + \frac{h_m}{\lambda - \lambda_m},$$

但是由推论 2.3.2 的证明可知

$$\int_0^{\pi} G(x, t, \lambda) \varphi_m(x) \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} G(t, x, \lambda) \varphi_m(x) \mathrm{d}x = \frac{\varphi_m(t)}{\lambda - \lambda_m}.$$

于是

$$\frac{h_m}{\lambda - \lambda_m} = \mu h_m + \frac{h_m}{\lambda - \lambda_m},$$

$\mu h_m = 0$, 所以 $h_m = 0$. 这样便得

$$\int_0^{\pi} G(x, t, \lambda) h(t) \mathrm{d}t = \mu h(x).$$

左边作为 x 的函数在 $\mathscr{D}(T)$ 中, 而

$$(\lambda I - T) \mu h(x) = (\lambda I - T) \int_0^{\pi} G(x, t, \lambda) h(t) \mathrm{d}t = h(x),$$

即

$$Th = \left(\lambda - \frac{1}{\mu} \right) h.$$

这表示 $\lambda - \frac{1}{\mu}$ 也是特征值, 这是不可能的, 故 $E(x, t, \lambda) \equiv 0$. ($\lambda - \frac{1}{\mu}$ 不可能是某个 λ_n, 因为 $h_n = (h, \varphi_n) = 0$!)

推论 2.3.3 设 $\lambda \neq \lambda_n, n = 1, 2, \cdots$, 则对任意的 $f \in L^2[0, \pi]$,

$$(R(\lambda, T) f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x),$$

其中, $f_n = (f, \varphi_n)$, $n = 1, 2, \cdots$, 级数在 $[0, \pi]$ 上绝对一致收敛.

证明

$$G(x, t, \lambda) = R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(t)}{\lambda - \lambda_n},$$

对于固定的 x, 作为 t 的函数, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda-\lambda_n}$ 一致收敛到 $G(x,t,\lambda)$, 因而平均收敛, 于是由内积的连续性可得

$$\int_0^{\pi} G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{\lambda-\lambda_n}\int_0^{\pi} f(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(x),$$

而

$$|f_n|\leqslant\|f\|,\quad n=1,2,\cdots,$$

$|\varphi_n(x)|\leqslant A, n=1,2,\cdots$, (由引理 2.1.2) 故收敛是绝对一致收敛.

定理 2.3.3 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2[0,\pi]$ 的规范正交基.

证明 设 $f\in L^2[0,\pi]$, 若 $f_n=(f,\varphi_n)=0,\ n=1,2,\cdots$, 则 $R(\lambda,T)f=0$. 于是 $f=0$.

由此不难得到 T 的谱分解

$$P_\lambda f=\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda}(f,\varphi_n)\varphi_n,\quad \lambda\in(-\infty,\infty),$$

$$T=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\mathrm{d}P_\lambda.$$

特别地, 如果 $u\in C^2[0,\pi]$, $l_1(u)=l_2(u)=0$, 则 $u\in\mathscr{D}(T)$, 记 $f=(\lambda I-T)u$, 则 $u=R(\lambda,T)f$, 那么

$$u(x)=(R(\lambda,T)f)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(x)\text{在 }[0,\pi]\text{ 上一致成立},$$

$$f_n=(f,\varphi_n)=((\lambda-T)u,\varphi_n)=(\lambda-\lambda_n)(u,\varphi_n),$$

所以 $u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(u,\varphi_n)\varphi_n(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上一致成立.

例 2.3.1 $M=-D^2$, $x\in[0,1]$, $T_0(M)$ 下半有界, 下界为 0①. T 是 $T_0(M)$ 的 Friedrichs 延拓, 所以 $\sigma(T)\subset[0,\infty)$,

$$\mathscr{D}(T)=\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))|f(0)=f(1)=0\}.$$

来求 $\sigma(T)$. 考虑

$$\begin{cases}-y''=\lambda y,\\ y(0)=y(1)=0.\end{cases}$$

---

① $f\in C_0^{\infty}(0,1)$, $(T_0(M)f,f)=\int_0^1 -f''\overline{f}\mathrm{d}x=-f'\overline{f}|_0^1+\int_0^1|f'|^2\mathrm{d}x=\int_0^1|f'|^2\mathrm{d}x\geqslant 0.$

(1) $\lambda<0$, $\lambda=-k^2$,

$$y=c_1\mathrm{e}^{-kx}+c_2\mathrm{e}^{kx},$$

$$\begin{cases} y(0)=0, \\ y(1)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} c_1+c_2=0, \\ c_1\mathrm{e}^{-k}+c_2\mathrm{e}^{k}=0, \end{cases}$$

所以 $c_1=c_2=0$, λ 不是特征值.

(2) $\lambda=0$,

$$y=c_1+c_2x,$$

$$y(0)=0, \quad c_1=0,$$

$$y(1)=0, \quad c_2=0,$$

λ 也不是特征值.

(3) $\lambda>0, \lambda=k^2$,

$$y=c_1\cos kx+c_2\sin kx,$$

$$y(0)=0, \quad c_1=0,$$

$$y(1)=0, \quad c_2\sin k=0,$$

$k=n\pi, n=1,2,\cdots,\quad \lambda=n^2\pi^2, n=1,2,\cdots$, 所以

$$\sigma(T)=\left\{n^2\pi^2|n=1,2,\cdots\right\},$$

$$\int_0^1\sin^2 n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1-\cos 2n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$\varphi_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x.$$

对任意的 $f\in L^2[0,1]$, 有

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f(t)\sqrt{2}\sin n\pi t\mathrm{d}t\cdot\sqrt{2}\sin n\pi x$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f(t)\sin n\pi t\mathrm{d}t\cdot\sin n\pi x,$$

这是 Fourier 正弦展开.

当 $\lambda\neq n^2\pi^2$, $n=1,2,\cdots$ 时, 来求 $R(\lambda,T)$, 即要求 Green 函数 $G(x,t,\lambda)$. 假设 $\lambda\neq 0$,

$$\begin{cases} -y_1''=\lambda y_1, \\ y_1(0)=0, y_1'(0)=1, \end{cases}$$

$$y_1 = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

因为 $y_1(0)=0$, 所以 $A=0$; 而 $y_1'(0)=1$, 所以 $B\sqrt{\lambda}=1$, $B=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$. 于是

$$y_1(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}.$$

再设

$$\begin{cases} -y_2'' = \lambda y_2, \\ y_2(1)=0, \quad y_2'(1)=1, \end{cases}$$

$$y_2 = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x,$$

因为 $y_2(1)=0$, 所以

$$A\cos\sqrt{\lambda} + B\sin\sqrt{\lambda} = 0;$$

而 $y_2'(1)=1$, 所以

$$-\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda} = 1.$$

于是

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \sin\sqrt{\lambda} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = -\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

$$B = \begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda} & 0 \\ -\sin\sqrt{\lambda} & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = \frac{\cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

$$y_2 = -\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}x + \frac{\cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(x-1),$$

$$\omega(\lambda) = \begin{vmatrix} \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} & -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}x + \dfrac{\cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x \\ \cos\sqrt{\lambda}x & \sin\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + \cos\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}.$$

可见

$$\sigma(T) = \{\lambda|\omega(\lambda)=0\} = \{n^2\pi^2|n=1,2,\cdots\}.$$

当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\left(-\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}x + \dfrac{\cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x\right)\Big/\omega(\lambda), & t \leqslant x, \\ \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\left(-\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}t + \dfrac{\cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}t\right)\Big/\omega(\lambda), & t > x, \end{cases}$$

$$
=\begin{cases} -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\,(1-x)\,, & t\leqslant x,\\[2ex] -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\,(1-t)\,, & t>x,\end{cases}
$$

对于 $\lambda=0$, 取 $y_1(x)=x$, $y_2(x)=-1+x$, 可得

$$
G(x,t,0)=\begin{cases} -t\,(1-x)\,, & t\leqslant x,\\ -x\,(1-t)\,, & t>x.\end{cases}
$$

这里只得到了在平均收敛意义下有

$$
f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n(x),\quad f\in L^2[0,\pi],
$$

即

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left|f\,(x)-\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)\,\varphi_k\,(x)\right|^2\mathrm{d}x=0.
$$

那么这一收敛性质能否进一步加强呢? 例如, 是否有

$$
f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(f,\varphi_k)\,\varphi_k\,(x)
$$

几乎处处成立, 点点成立或是一致收敛?

下面还是把确定 $\mathscr{D}(T)$ 的边条件写成

$$
\begin{cases} f'(0)-hf(0)=0,\\ f'(\pi)+Hf(\pi)=0,\end{cases}
$$

假定 $h\neq\infty, H\neq\infty$, 其他情况可以类似地讨论. 设 $q(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有有界的导数, 则有

$$
\lambda_n=s_n^2,\quad s_n=n+\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad c=\frac{1}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(x)\mathrm{d}x\right),
$$

$$
\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad \beta(x)=-cx+h+\frac{1}{2}\int_0^{x}q(t)\mathrm{d}t,
$$

如果 $f\in L^2[0,\pi]$, 则 f 在 $[0,\pi]$ 上 Lebesgue 绝对可积, 考虑它按特征函数展开的部分和

$$S_{n,f}(x)=\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)\,\varphi_k(x)=\int_0^{\pi}f(t)\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\varphi_k(t)\mathrm{d}t$$

以及在 $[-\pi,\pi]$ 上作偶延拓后按三角函数展开的部分和

$$\sigma_{n,f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx=\int_0^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos kx\cos kt\right)\mathrm{d}t,$$

令

$$S_{n,f}(x)-\sigma_{n,f}(x)=\int_0^{\pi}\Phi_n(x,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

引理 2.3.1　存在常数 C, 使得

$$|\varPhi_n(x,t)|\leqslant C,\quad n=1,2,\cdots.$$

证明

$$\begin{aligned}
&\varphi_k(x)\varphi_k(t)-\frac{2}{\pi}\cos kx\cos kt\\
=&\frac{2}{\pi}\left(\frac{\beta(x)}{k}\sin kx\cos kt+\frac{\beta(t)}{k}\cos kx\sin kt\right)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\\
=&\frac{2}{k\pi}\left(\left(\frac{\beta(x)+\beta(t)}{2}+\frac{\beta(x)-\beta(t)}{2}\right)\sin kx\cos kt\right.\\
&\left.+\left(\frac{\beta(x)+\beta(t)}{2}-\frac{\beta(x)-\beta(t)}{2}\right)\cos kx\sin kt\right)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\\
=&\frac{1}{k\pi}\left((\beta(x)+\beta(t))\sin k(x+t)+(\beta(x)-\beta(t))\sin k\,(x-t)\right)+O\left(\frac{1}{k^2}\right).
\end{aligned}$$

因为 $\beta(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有界, 所以只需证明 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$ 在 $[0,\pi]$ 上一致有界即可.

$$\begin{aligned}
\tau_n(x)=&\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\int_0^{x}\sum_{k=1}^{n}\cos kt\mathrm{d}t=\int_0^{x}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\\
=&\int_0^{x}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t+\int_0^{x}\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t-\frac{x}{2}\\
=&\int_0^{(n+\frac{1}{2})x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u+\int_0^{x}\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t-\frac{x}{2},
\end{aligned}$$

显然

$$\int_0^N \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.$$

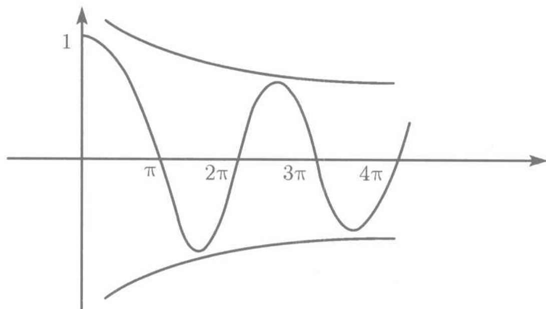


图 2.14

于是

$$|\tau_n(x)| \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u + \int_0^\pi \left|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right|\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{t - 2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2} + t\cos\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}}{2\cos\frac{t}{2} - \frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}} = 0.$$

引理 2.3.2 如果 $f \in C^2[0,\pi]$ 且满足边条件

$$f'(0) - hf(0) = 0, \quad f'(\pi) + Hf(\pi) = 0,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \Phi_n(x,t)f(t)\mathrm{d}t = 0$$

对于 $x \in [0,\pi]$ 一致成立.

证明 由 Fourier 级数理论,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{n,f}(x) = f(x)$$

对于 $x \in [0,\pi]$ 一致成立. 另外, 由推论 2.3.3 也有

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,f}(x) = f(x)$$

对于 $x \in [0,\pi]$ 一致成立. 于是得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \varPhi_n(x,t)f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}(S_{n,f}(x) - \sigma_{n,f}(x)) = 0$$

对 $x \in [0,\pi]$ 一致成立.

定理 2.3.4 对任意的 $f \in L^2[0,\pi]$, 极限

$$\lim_{n\to\infty}(S_{n,f}(x) - \sigma_{n,f}(x)) = 0$$

对于 $x \in [0,\pi]$ 一致成立.

证明 任给 $\varepsilon > 0$, $\forall f \in L^2[0,\pi]$, 存在 $h \in C_0^{\infty}(0,\pi)$, 使得

$$\int_0^{\pi} |f(x) - h(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2C},$$

C 即引理 2.3.1 中之常数. 于是

$$S_{n,f}(x) - \sigma_{n,f}(x) = \int_0^{\pi} \varPhi_n(x,t)(f(t) - h(t))\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \varPhi_n(x,t)h(t)\mathrm{d}t.$$

利用引理 2.3.2, 存在 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时,

$$\left|\int_0^{\pi} \varPhi_n(x,t)h(t)\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in [0,\pi].$$

因此当 $n \geqslant N$ 时,

$$\begin{aligned}|S_{n,f}(x) - \sigma_{n,f}(x)| &\leqslant \int_0^{\pi} |\varPhi_n(x,t)|\,|f(t) - h(t)|\mathrm{d}t \\ &\quad + \left|\int_0^{\pi} \varPhi_n(x,t)h(t)\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

这样, $f \in L^2[0,\pi]$ 按特征函数展开的级数在 $[0,\pi]$ 上某一点收敛或发散的性质便取决于它的余弦级数在该点的收敛与发散的性质.

2.4 常型自伴微分算子的谱分解

设

$$M=\sum_{K=0}^{n}p_k(x)D^k,\quad x\in[a,b]$$

是对称的正则微分算式 (所以系数可以是复的), T 是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓, 则

$$\mathscr{D}(T)=\left\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,\middle|\,U_jf\equiv\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}D^{k-1}f(a)+\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}D^{k-1}f(b)=0,j=1,\cdots,n\right\},$$

这里 $\boldsymbol{A}=(\alpha_{jk}),\boldsymbol{B}=(\beta_{jk})$ 满足 1.3 节定理的条件. 要考虑 T 的谱分解.

定理 2.4.1 算子 T 存在着至多可数个特征值, 特征值集合没有有限的聚点.

证明 取 $c\in[a,b]$, 设 $\varphi_j(x,\lambda),j=1,\cdots,n$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases}My=\lambda y,\\ y^{(k-1)}(c)=\delta_{jk},\quad k=1,\cdots,n\end{cases}$$

的解, 则 $\{\varphi_j(x,\lambda)\,|\,j=1,\cdots,n\}$ 是 $My=\lambda y$ 的一个基本解组. λ 是 T 的特征值当且仅当存在一组不全为 0 的 $c_1,\cdots,c_n$, 使得

$$U_j\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\right)=0,\quad j=1,\cdots,n,$$

即 λ 是 T 的特征值当且仅当

$$\Delta(\lambda)=\det(U_j\varphi_k)=0.$$

因为 $\varphi_j(x,\lambda),j=1,\cdots,n$ 是 λ 的整函数, 所以 $\Delta(\lambda)$ 是整函数, 由于 T 没有复特征值, $\Delta(\lambda)$ 是不恒为 0 的整函数, 根据整函数零点的性质, 特征值至多可数, 它们没有有限的聚点.

想证明 T 具有纯点谱, 于是 λ 只要不是特征值, 它就是 T 的正则点, 既然 T 是微分算子, 那么豫解算子 $R(\lambda,T)=(\lambda I-T)^{-1}$ 看来应当是积分算子, 下面来找这个积分算子的核.

定理 2.4.2 存在定义在 $R=\{(x,t,\lambda)\,|\,a\leqslant x,t\leqslant b,\lambda\in\mathbf{C}\}$ 上的函数 $G(x,t,\lambda)$ 具有下述性质:

(1) 对任何固定的 $(x,t),G(x,t,\lambda)$ 是 λ 的半纯函数, 极点为 T 的特征值 (G 在 $\mathbf{C}$ 上除去极点外是解析的, 如果在极点处令 $G(\lambda)=\infty$, 则 $G:\mathbf{C}\to\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 是一个连续函数.);

(2) $\dfrac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,t,\lambda), k=0,1,\cdots,n-2$ 在 $R_0=\{(x,t,\lambda)|a\leqslant x,t\leqslant b,\lambda\neq$ 特征值$\}$ 上连续. $\dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x,t,\lambda)$ 分别在 $R_1=R_0\cap\{(x,t,\lambda)\,|x<t\}$ 和 $R_2=R_0\cap\{(x,t,\lambda)\,|x\geqslant t\}$ 上连续;

(3) $\dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(t+0,t,\lambda)-\dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(t-0,t,\lambda)=-\dfrac{1}{p_n(t)}$, $\lambda\neq$ 特征值;

(4) 作为 x 的函数, $\lambda\neq$ 特征值, 当 $x\neq t$ 时, $MG=\lambda G$;

(5) 作为 x 的函数, $\lambda\neq$ 特征值, $U_jG=0, j=1,\cdots,n$;

(6) $\lambda\neq$ 特征值, 边值问题

$$\begin{cases}\lambda y-My=f,\\ U_jy=0,\quad j=1,\cdots,n\end{cases}$$

对任何 $f\in L^2[a,b]$ 都有解

$$y(x,\lambda)=\int_a^b G\,(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t;$$

(7) 具有性质 (1)—(6) 的 $G(x,t,\lambda)$ 是唯一的.

称 $G(x,t,\lambda)$ 是边值问题

$$\begin{cases}\lambda y-My=f,\\ U_jy=0,\quad j=1,\cdots,n\end{cases}$$

的 Green 函数或豫解算子 $R(\lambda,t)=(\lambda I-T)^{-1}$ 的 Green 核.

当 $n>1$ 时, $G(x,t,\lambda)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续. 当 $n=1$ 时, 由于 $G\,(t-0,t,\lambda)$ 和 $G\,(t+0,t,\lambda)$ 存在, 可以将 G 延拓到 $a\leqslant x\leqslant t\leqslant b$ 和 $a\leqslant t\leqslant x\leqslant b$ 闭三角形上成为分别在闭三角形上连续的函数, 所以 λ 不是 T 的特征值时, $G(x,t,\lambda)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上都平方可积. 因此 $\lambda\in\rho(T)$ 且 $R\,(\lambda,T)$ 是 Carleman 算子.

推论 2.4.1　T 有纯点谱.

定理 2.4.2 的证明

(1) 设 $c\in[a,b]$, 而 $\varphi_1(x,\lambda),\cdots,\varphi_n(x,\lambda)$ 满足

$$\begin{cases}M\varphi_j=\lambda\varphi_j,\\ \varphi_j^{(k-1)}(c)=\delta_{jk},k=1,\cdots,n,\end{cases}\qquad j=1,\cdots,n.$$

令[1]

$$K(x,t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{p_n(t)W(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)(t)}\begin{vmatrix}\varphi_1(t,\lambda) & \cdots & \varphi_n(t,\lambda)\\ \varphi_1'(t,\lambda) & \cdots & \varphi_n'(t,\lambda)\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_1^{(n-2)}(t,\lambda) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t,\lambda)\\ \varphi_1(x,\lambda) & \cdots & \varphi_n(x,\lambda)\end{vmatrix}, & t\leqslant x,\\ 0, & t>x,\end{cases}$$

---

[1] 关于 $K(x,t,\lambda)$ 的讨论:

事实上,

$$My=\lambda y+f,\quad (M-\lambda)y=f.$$

设齐次方程基础解系为 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$, 则由常数变易法知

$$\begin{aligned}y&=c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n,\\ y'&=c_1\varphi_1'+\cdots+c_n\varphi_n',\quad c_1'\varphi_1+\cdots+c_n'\varphi_n=0,\\ y''&=c_1\varphi_1''+\cdots+c_n\varphi_n'',\quad c_1'\varphi_1'+\cdots+c_n'\varphi_n'=0,\\ &\vdots\\ y^{(n-1)}&=c_1\varphi_1^{(n-1)}+\cdots+c_n\varphi_n^{(n-1)},\quad c_1'\varphi_1^{(n-2)}+\cdots+c_n'\varphi_n^{(n-2)}=0,\\ y^{(n)}&=c_1\varphi_1^{(n)}+\cdots+c_n\varphi_n^{(n)}+c_1'\varphi_1^{(n-1)}+\cdots+c_n'\varphi_n^{(n-1)}.\end{aligned}$$

代入方程

$$\begin{aligned}My&=\sum_{k=1}^n c_kM\varphi_k+p_n(x)\sum_{k=1}^n c_k'\varphi_k^{(n-1)}\\ &=\lambda\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k+f,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=1}^n c_k'\varphi_k^{(n-1)}=\frac{f}{p_n}.$$

解出

$$\begin{aligned}c_k'&=\frac{1}{W(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)}\begin{vmatrix}\varphi_1 & \cdots & 0 & \cdots & \varphi_n\\ \varphi_1' & \cdots & 0 & \cdots & \varphi_n'\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \dfrac{f}{p_n} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}\\ &=\frac{f(x)}{p_n(x)W(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)(x)}W_k(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(x,\lambda)&=\int_a^x\sum_{k=1}^n\frac{f(t)W_k(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)(t)}{p_n(t)W(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)(t)}\varphi_k(x,\lambda)\mathrm{d}t=\int_a^x\frac{f(t)}{p_n(t)W(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)(t)}\\ &\quad\times\sum_{k=1}^n(-1)^{n+k}\varphi_k(x,\lambda)\begin{vmatrix}\varphi_1(t,\lambda) & \cdots & \varphi_{k-1}(t,\lambda) & \varphi_{k+1}(t,\lambda) & \cdots & \varphi_n(t,\lambda)\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_1^{(n-2)}(t,\lambda) & \cdots & \varphi_{k-1}^{(n-2)}(t,\lambda) & \varphi_{k+1}^{(n-2)}(t,\lambda) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t,\lambda)\end{vmatrix}\mathrm{d}t\\ &=\int_a^x\frac{f(t)}{p_n(t)W(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)(t)}\begin{vmatrix}\varphi_1(t,\lambda) & \cdots & \varphi_n(t,\lambda)\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_1^{(n-2)}(t,\lambda) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t,\lambda)\\ \varphi_1(x,\lambda) & \cdots & \varphi_n(x,\lambda)\end{vmatrix}\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b K(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由 Liouville 公式, $W(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)(t)=\mathrm{e}^{-\int_c^t \frac{p_{n-1}(s)}{p_n(s)}\mathrm{d}s}$, 与 λ 无关. 显然

$$\left.\frac{\partial^j K(x,t,\lambda)}{\partial x^j}\right|_{x=t}=0,\quad j=0,1,\cdots,n-2,$$

所以 $\dfrac{\partial^j K(x,t,\lambda)}{\partial x^j}, j=0,1,\cdots,n-2$ 关于 x,t 在 $R=[a,b]\times[a,b]$ 上连续, 并且对固定的 (x,t) 是 λ 的整函数. $\dfrac{\partial^{n-1}K}{\partial x^{n-1}}(x,t,\lambda)$ 和 $\dfrac{\partial^n K}{\partial x^n}(x,t,\lambda)$ 分别在

$$\{(x,t,\lambda)\,|a\leqslant x<t\leqslant b,\lambda\in\mathbf{C}\}\text{ 和 }\{(x,t,\lambda)\,|a\leqslant t\leqslant x\leqslant b,\lambda\in\mathbf{C}\}$$

上连续, 对固定的 (x,t), 也是 λ 的整函数且

$$\frac{\partial^{n-1}K}{\partial x^{n-1}}(t+0,t,\lambda)-\frac{\partial^{n-1}K}{\partial x^{n-1}}(t-0,t,\lambda)=\frac{1}{p_n(t)}.$$

当 $x\neq t$ 时, 作为 x 的函数, $MK=\lambda K$. 对任何 $f\in L^2[a,b]$, 令

$$y(x,\lambda)=-\int_a^b K(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t=-\int_a^x K(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$y'(x,\lambda)=-\int_a^x \frac{\partial K}{\partial x}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}
y^{(n-2)}(x,\lambda)&=-\int_a^x \frac{\partial^{n-2}K}{\partial x^{n-2}}(x,t,\lambda)\,f(t)\mathrm{d}t,\\
y^{(n-1)}(x,\lambda)&=-\int_a^x \frac{\partial^{n-1}K}{\partial x^{n-1}}(x,t,\lambda)\,f(t)\mathrm{d}t,\\
y^{(n)}(x,\lambda)&=-\int_a^x \frac{\partial^n K}{\partial x^n}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t-\frac{\partial^{n-1}K}{\partial x^{n-1}}(x,x-0,\lambda)\,f(x)\\
&=-\frac{\partial^{n-1}K}{\partial x^{n-1}}(x+0,x,\lambda)\,f(x)-\int_a^x \frac{\partial^n K}{\partial x^n}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t\\
&=-\frac{f(x)}{p_n(x)}-\int_a^x \frac{\partial^n K}{\partial x^n}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,\\
My&=-f(x)-\int_a^x MK(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t\\
&=-f(x)-\int_a^x \lambda K(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t\\
&=-f(x)+\lambda y(x,\lambda),
\end{aligned}$$

所以

$$\lambda y - My = f.$$

(2) K 不一定满足边界条件, 将它修改一下, 取①

$$G(x,t,\lambda) = -K(x,t,\lambda) - \sum_{l=1}^{n} c_l\varphi_l(x,\lambda),$$

其中, $c_1,\cdots,c_n$ 是待定的 (t,λ) 的函数, 使得对固定的 $t\in(a,b), G(x,t,\lambda)$ 作为 x 的函数满足

$$U_jG = 0,\quad j=1,\cdots,n,$$

$$\begin{cases} U_jK + \displaystyle\sum_{l=1}^{n} c_lU_j\varphi_l = 0, \\ j=1,\cdots,n, \end{cases} \qquad t\in(a,b).$$

这是一个 $c_1,\cdots,c_n$ 的方程组

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{n} c_lU_j\varphi_l = -U_jK, \\ j=1,\cdots,n, \end{cases} \qquad t\in(a,b),$$

这里

$$U_jK = \sum_{l=1}^{n}\alpha_{jl}K^{(l-1)}(a,t,\lambda) + \sum_{l=1}^{n}\beta_{jl}K^{(l-1)}(b,t,\lambda).$$

由于 $K^{(l-1)}(a,t,\lambda), K^{(l-1)}(b,t,\lambda), l=1,\cdots,n-1$ 都是 $t\in[a,b]$ 的连续函数, λ 的整函数, $K^{(n-1)}(b,t,\lambda)$ 也在 $t\in[a,b]$ 上连续, 而

$$K^{(n-1)}(a,t,\lambda) = \begin{cases} 0, & a<t\leqslant b, \\ \dfrac{1}{p_n(a)}, & t=a. \end{cases}$$

---

① 设 $G(x,t,\lambda) = -K + \square$, 则

$$y = -\int_a^b K(\cdot,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b \square f(t)\mathrm{d}t.$$

由

$$\begin{aligned} \lambda y - My &= \lambda y + f + \lambda\int_a^b K(\cdot,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b M\square f(t)\mathrm{d}t \\ &= f + \int_a^b \lambda\square f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b M\square f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

知应有

$$M\square = \lambda\square.$$

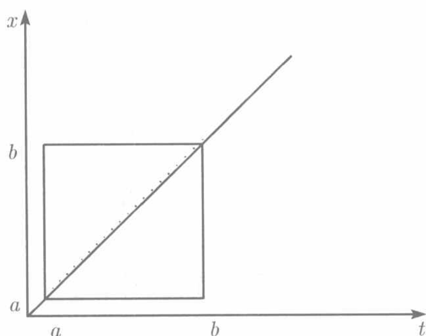


图 2.15

所以 $U_jK, j=1,\cdots,n$ 在 $t\in(a,b)$ 上连续, 它们在 $t\in[a,b]$ 上关于 λ 是整函数, 并且可以把 U_jK, $j=1,\cdots,n$ 延拓成为 $t\in[a,b]$ 上的连续函数, 这样便可以保证 $c_j(t,\lambda)$ 在 $t\in[a,b]$ 上的连续性, 因而不影响 G 及其导数的连续和间断性质. 方程组的行列式 $\Delta=\det(U_j\varphi_l)$ 是 λ 的整函数, 与 t 无关, 所以当 λ 不是特征值时, 解得 $c_1(t,\lambda),\cdots,c_n(t,\lambda)$, 它们在 $t\in[a,b]$ 连续, 而关于 λ 解析. 显然, 对固定的 $t\in[a,b]$, 它们是 λ 的半纯函数, 特征值 λ 乃是它们的极点. 这样得到的 $G(x,\lambda,t)$ 显然满足了 (1)~(5).

(3) $\lambda\neq$ 特征值时, 令

$$y(x,\lambda)=\int_a^b G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\begin{aligned}My(x,\lambda)&=-M\int_a^b K(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t-\sum_{l=1}^n M\int_a^b c_l(t,\lambda)\varphi_l(x,\lambda)f(t)\mathrm{d}t\\&=-f(x)-\lambda\int_a^b K(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t-\lambda\sum_{l=1}^n\int_a^b c_l(t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t\cdot\varphi_l(x,\lambda)\\&=-f(x)+\lambda\int_a^b\left(-K(x,t,\lambda)-\sum_{l=1}^n c_l(t,\lambda)\varphi_l(x,\lambda)\right)f(t)\mathrm{d}t\\&=-f(x)+\lambda y(x,\lambda),\end{aligned}$$

即

$$\lambda y-My=f.$$

另外,

$$U_jy=\int_a^b U_jG(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t=0,\quad j=1,\cdots,n.$$

因为被积函数在 $t\in(a,b)$ 上为零, 所以即便没有 a,b 两点的信息, 也足以保证积分为零了. 这表示 G 满足 (6).

(4) 证明 G 的唯一性.

假若有两个: G 与 $\widetilde{G}$. 当 $\lambda\neq$ 特征值时, 作为 x 的函数, 由于相减把间断处的跳跃抹去了, 故

$$G-\widetilde{G}\in C^{n-1}[a,b],$$

由于 $x\neq t$ 时,

$$M\left(G-\widetilde{G}\right)=\lambda\left(G-\widetilde{G}\right),$$

所以 $x\neq t$ 时有

$$\frac{\partial^n\left(G-\widetilde{G}\right)}{\partial x^n}(x,t,\lambda)=\left[\lambda\left(G-\widetilde{G}\right)-p_{n-1}(x)\frac{\partial^{n-1}\left(G-\widetilde{G}\right)}{\partial x^{n-1}}-\cdots\right.$$
$$\left.-p_0(x)\left(G-\widetilde{G}\right)\right]\Big/p_n(x),$$

右边在 $x\in[a,b]$ 连续, 故作为 x 的函数

$$G-\widetilde{G}\in C^n[a,b].$$

这样, $G-\widetilde{G}$ 便是边值问题

$$\begin{cases}My=\lambda y,\\ U_jy=0,\quad j=1,\cdots,n\end{cases}$$

的解, 因为 λ 不是特征值, 所以 $G=\widetilde{G}$.

例 2.4.1 设 $M=\mathrm{i}D$, $x\in[0,1]$, T 为 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$\mathscr{D}(T)=\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,|\,f(0)-f(1)=0\}.$$

设 $\lambda\neq 0$, 若

$$\begin{cases}M\varphi=\lambda\varphi,\\ \varphi(0,\lambda)=1,\end{cases}$$

则

$$\mathrm{i}\varphi'=\lambda\varphi,\quad \varphi'=-\mathrm{i}\lambda\varphi,\quad \varphi(x,\lambda)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}.$$

令

$$K(x,t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-t)}, & t\leqslant x,\\[2mm] 0, & t>x,\end{cases}$$

则 $G(x,t,\lambda) = -K(x,t,\lambda) - c\varphi(x,\lambda)$, $G(0,t,\lambda) = -c$, $G(1,t,\lambda) = -\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(1-t)} - c\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}$, $G(0) - G(1) = 0$, 即

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(1-t)} + c\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} - c = 0,$$

所以

$$c = \frac{-\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(1-t)}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} - 1} = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(1-t)}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} - 1)}.$$

于是

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-t)} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(1-t)-\mathrm{i}\lambda x}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} - 1)}, & t \leqslant x, \\ \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(1-t)-\mathrm{i}\lambda x}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} - 1)}, & t > x, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-t)}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} - 1)}, & t \leqslant x, \\ \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-t+1)}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} - 1)}, & t > x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-t-1)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} - 1}, & t \leqslant x, \\ \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-t)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} - 1}, & t > x. \end{cases}$$

注意, 这里 0 是特征值, 对应的特征函数是 1, 所以在 $G(x,t,\lambda)$ 中 $\lambda \neq 0$ 才有确定的定义.

例 2.4.2 设 $M = -D^2$, $x \in [0,1]$, T 为 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \,|\, f(0) = f(1) = 0\}.$$

当 $\lambda \neq 0$ 时, 由

$$\begin{cases} M\varphi_1 = \lambda\varphi_1, \\ \varphi_1(0,\lambda) = 1, \\ \varphi_1'(0,\lambda) = 0 \end{cases}$$

得 $\varphi_1(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x$; 而由

$$\begin{cases} M\varphi_2 = \lambda\varphi_2, \\ \varphi_2(0,\lambda) = 0, \\ \varphi_2'(0,\lambda) = 1 \end{cases}$$

得 $\varphi_2(x,\lambda)=\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$; 所以 $W(\varphi_1,\varphi_2)=1$ 且

$$K(x,t,\lambda)=\begin{cases}-\begin{vmatrix}\cos\sqrt{\lambda}t & \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\\ \cos\sqrt{\lambda}x & \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\end{vmatrix}, & t\leqslant x,\\ 0, & t>x\end{cases}=\begin{cases}-\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}, & t\leqslant x,\\ 0, & t>x.\end{cases}$$

若

$$G(x,t,\lambda)=-K(x,t,\lambda)-c_1\cos\sqrt{\lambda}x-c_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}},$$

则

$$G(0,t,\lambda)=-c_1=0,\quad c_1=0,$$

$$G(1,t,\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}-c_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}=0,\quad c_2=\frac{\sin\sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}}.$$

于是

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}-\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(1-t)}{\sin\sqrt{\lambda}}\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}, & t\leqslant x,\\ -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(1-t)\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}, & t>x.\end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}&\sin\sqrt{\lambda}(x-t)\sin\sqrt{\lambda}-\sin\sqrt{\lambda}(1-t)\sin\sqrt{\lambda}x\\ =&\sin\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}t-\sin\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x\sin\sqrt{\lambda}t\\ &-\sin\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}t+\sin\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t\\ =&-\sin\sqrt{\lambda}t\sin\sqrt{\lambda}(1-x),\end{aligned}$$

所以

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(1-x)\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}, & t\leqslant x,\\ -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}(1-t)\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}, & t>x.\end{cases}$$

当 $\lambda=0$ 时 (也可由 $\lambda\neq0$ 情形取极限 $\lambda\to0$ 得), 由

$$\begin{cases}M\varphi_1=0,\\ \varphi_1(0,0)=1,\\ \varphi_1'(0,0)=0\end{cases}$$

得 $\varphi_1(x,0)=1$; 由

$$\begin{cases} M\varphi_2=0, \\ \varphi_2(0,0)=0, \\ \varphi_2'(0,0)=1 \end{cases}$$

得 $\varphi_2(x,0)=x$; 所以

$$K(x,t,0)=\begin{cases} -\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & x \end{vmatrix}, & t\leqslant x, \\ 0, & t>x \end{cases} =\begin{cases} -(x-t), & t\leqslant x, \\ 0, & t>x. \end{cases}$$

设 $G(x,t,0)=-K(x,t,0)-c_1-c_2x$, 则 $0=G(0,t,0)=-c_1$, 所以 $c_1=0$; 而 $0=G(1,t,0)=1-t-c_2$, 所以 $c_2=1-t$. 于是

$$G(x,t,0)=\begin{cases} (x-t)-(1-t)x, & t\leqslant x, \\ -(1-t)x, & t>x \end{cases} =\begin{cases} -t(1-x), & t\leqslant x, \\ -x(1-t), & t>x. \end{cases}$$

定理 2.4.3　豫解算子 $R(\lambda,T)$ 的 Green 核 $G(x,t,\lambda)$ 只有简单极点.

证明　$G(x,t,\lambda)$ 是半纯函数, 极点 λ_k 是 T 的特征值, 如果 $G(x,t,\lambda)$ 在 λ_k 有 m 阶极点, $m>1$, 则

$$G(x,t,\lambda)=\frac{G_m(x,t)}{(\lambda-\lambda_k)^m}+\frac{G_{m-1}(x,t)}{(\lambda-\lambda_k)^{m-1}}+\cdots,$$

其中, $G_m(x,t)$ 不为零. 于是存在 $f\in C[a,b]$, 使得

$$f_m(x)=\int_a^b G_m(x,t)f(t)\mathrm{d}t\neq 0,$$

那么

$$y(x,\lambda)=\frac{f_m(x)}{(\lambda-\lambda_k)^m}+\frac{f_{m-1}(x)}{(\lambda-\lambda_k)^{m-1}}+\cdots$$

满足

$$(\lambda I-T)y=f,\quad U_jy=0,\ j=1,\cdots,n.$$

于是

$$(\lambda_kI-T)y=(\lambda_k-\lambda)y+f,$$

$$U_jy=0,\quad j=1,\cdots,n,$$

即

$$\frac{(\lambda_kI-T)f_m}{(\lambda-\lambda_k)^m}+\frac{(\lambda_kI-T)f_{m-1}}{(\lambda-\lambda_k)^{m-1}}+\cdots=f-\frac{f_m}{(\lambda-\lambda_k)^{m-1}}-\frac{f_{m-1}}{(\lambda-\lambda_k)^{m-2}}-\cdots.$$

由 Laurent 展开的唯一性知

$$\begin{cases}(\lambda_k I - T)f_m = 0,\\ (\lambda_k I - T)f_{m-1} = f_m,\\ \cdots\end{cases}\qquad \begin{cases}U_jG_m = 0,\\ U_jG_{m-1} = 0, \qquad j = 1,\cdots,n,\\ \cdots\end{cases}$$

$$\left(0 = U_jG = \frac{U_jG_m}{(\lambda-\lambda_k)^m} + \frac{U_jG_{m-1}}{(\lambda-\lambda_k)^{m-1}} + \cdots\right)$$

于是也有

$$\begin{cases}U_jf_m = 0,\\ U_jf_{m-1} = 0, \qquad j = 1,\cdots,n,\\ \cdots\end{cases}$$

这样 $f_m \in \mathscr{D}(T)$, 而

$$\|f_m\|^2 = (f_m, (\lambda_k I - T)f_{m-1}) = ((\lambda_k I - T)f_m, f_{m-1}) = 0,$$

与 $f_m \neq 0$ 矛盾!

虽说 T 的特征值 λ_n 都是 $G(x,t,\lambda)$ 的极点, 但求 λ_n 处的残数并不容易, 所以要想像定理 2.3.2 那样得到核的展开, 得另想办法.

因为 M 是线性的, 如果移动一个实数 α 得 $M_1 = M - \alpha$, M_1 也是正则对称微分算式

$$\mathscr{D}(T_1(M_1)) = \mathscr{D}(T_1(M)),$$
$$\mathscr{D}(T_0(M_1)) = \mathscr{D}(T_0(M)),$$

而 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓的充要条件是 $T_1 = T - \alpha I$ 是 $T_0(M_1)$ 的自伴延拓, 于是 "λ 是 T 的特征值, φ 是对应的特征函数" 的充要条件是 "$\lambda_1 = \lambda - \alpha$ 是 T_1 的特征值, φ 是对应的特征函数". 因此不妨假定 0 不是 T 的特征值, 令

$$G(x,t) = G(x,t,0),$$

$$(Gf)(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t, \quad f \in L^2[a,b].$$

定理 2.4.4 G 是紧自伴算子且 $G(x,t) = \overline{G(t,x)}$.

证明 设 $u, v \in L^2[a,b]$, 因为 $G = R(0,T) = -T^{-1}$, 所以

$$f = Gu \in \mathscr{D}(T),$$

$$Tf = TGu = -u,$$

$$(Gu, v) = (Gu, -TGv) = (-TGu, Gv) = (u, Gv).$$

因为 G 的核是连续的, 所以 G 是紧自伴算子. 由于

$$\int_a^b \int_a^b G(x,t)u(t)\mathrm{d}t\overline{v(x)}\mathrm{d}x = (Gu,v) = (u,Gv) = \int_a^b u(x)\overline{\int_a^b G(x,t)v(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b \int_a^b (G(x,t) - \overline{G(t,x)})u(t)\overline{v(x)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x = 0,$$

利用 $u(t)\overline{v(x)}$ 的线性组合在 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 中的稠性, 可得 $G(x,t) = \overline{G(t,x)}$.

定理 2.4.5 $\sigma(T) = \left\{-\dfrac{1}{\mu}\middle|\mu\in\sigma(G), \mu\neq 0\right\}$.

注 由于 $\sigma(G)$ 是闭集, 而 G 是紧的自伴算子, 所以 0 将属于 $\sigma(G)$, 但它不是 G 的特征值.

证明 如果 $\lambda\in\sigma(T)$, φ 是相应的特征函数, 则

$$T\varphi = \lambda\varphi, \quad \lambda\neq 0,$$

于是

$$\varphi = G(-T)\varphi = G(-\lambda\varphi), \quad G\varphi = -\frac{1}{\lambda}\varphi, \quad -\frac{1}{\lambda}\in\sigma(G).$$

反过来, 如果 $\mu\in\sigma(G), \mu\neq 0$, ψ 是相应的特征函数,

$$G\psi = \mu\psi,$$

则 $\psi = \dfrac{1}{\mu}G\psi\in\mathscr{D}(T)$ 且有 $-T\psi = \dfrac{1}{\mu}(-T)G\psi = \dfrac{1}{\mu}\psi$, $\quad T\psi = -\dfrac{1}{\mu}\psi$, $\quad -\dfrac{1}{\mu}\in\sigma(T)$.

T 是否恰有可数个非零特征值呢? 就看 G 是否一定有可数个非零的特征值.

定理 2.4.6 $\sigma(T) = \{\lambda_n | n = 1,2,\cdots\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty$.

证明 要证明 G 有可数个非零特征值. G 的绝对值最大的特征值是 $\mu_1 = \|G\|$ 或 $-\|G\|$, 如果相应的规范化特征函数是 $\varphi_1(x)$, 则 φ_1 是条件极值问题 $\sup\limits_{\|y\|=1}|(Gy,y)|$ 的解. 令

$$G_1(x,t) = G(x,t) - \mu_1\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(t)},$$

$$\overline{G_1(t,x)} = \overline{G(t,x)} - \overline{\mu_1\varphi_1(t)\overline{\varphi(x)}} = G_1(x,t),$$

这也是一个对称的 L^2 核, 设对应的紧自伴算子是 G_1, 那么 $\mu = \|G_1\|$ 或 $-\|G_1\|$ 是它的特征值, 如果相应的规范化特征函数是 $\psi(x)$, 则

$$G_1\psi = \mu\psi,$$

即

$$G\psi - \mu_1(\psi,\varphi_1)\varphi_1 = \mu\psi.$$

故

$$\begin{aligned}\mu(\psi,\varphi_1)&=(G\psi,\varphi_1)-\mu_1(\psi,\varphi_1)\\&=(\psi,G\varphi_1)-\mu_1(\psi,\varphi_1)=(\psi,\mu_1\varphi_1)-\mu_1(\psi,\varphi_1)=0,\\&(\psi,\varphi_1)=0.\end{aligned}$$

于是

$$G\psi=\mu\psi.$$

令 $\mu_2=\mu,\varphi_2=\psi$, 则 φ_2 可以看成是条件极值问题

$$\sup_{\|y\|=1,(y,\varphi_1)=0}|(Gy,y)|$$

的解, 当然

$$|\mu_1|\geqslant|\mu_2|,$$

这样可以求得 G 的一系列特征值. 如果 G 只有有限个非零特征值, 那么条件极值问题进行有限 m 步以后就停下来, 这表示对称核

$$G_m(x,t)=G(x,t)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)},$$

对应的算子 G_m 的模 $\|G_m\|=0$. 于是对任意的 $f\in L^2[a,b]$, 有

$$0=G_mf=Gf-\sum_{k=1}^{m}\mu_k(f,\varphi_k)\varphi_k,$$

即

$$Gf=\sum_{k=1}^{m}\mu_k(f,\varphi_k)\varphi_k,$$

这样

$$f=-TGf=-\sum_{k=1}^{m}\mu_k(f,\varphi_k)T\varphi_k=-\sum_{k=1}^{m}\mu_k(f,\varphi_k)\left(-\frac{1}{\mu_k}\varphi_k\right)=\sum_{k=1}^{m}(f,\varphi_k)\varphi_k,$$

右边是 $C^n[a,b]$ 的函数, 而 $f\in L^2[a,b]$ 可以任意, 矛盾! 所以 G 必有可数个非零特征值

$$|\mu_1|\geqslant|\mu_2|\geqslant\cdots\geqslant|\mu_n|\geqslant\cdots.$$

因为 0 是 G 的非零特征值唯一的极限点, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n=0,$$

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$.

设 φ_n 是 T 的对应于 λ_n 的规范化特征函数, 下面来证明 $\{\varphi_n|n=1,2,\cdots\}$ 是 $L^2[a,b]$ 的规范化正交基.

定理 2.4.7 若 $f\in C^n[a,b]$, $U_jf=0, j=1,\cdots,n$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

证明 显然 $f\in\mathscr{D}(T)$, 如果令 $u=-Tf$, 则 f 又可表成 $f=Gu$. 记

$$G_m(x,t)=G(x,t)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}, \mu_k=-\frac{1}{\lambda_k},$$

那么

$$\|G_m\|=|\mu_{m+1}|,$$

$$\|G_mu\|=\left\|Gu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k(u,\varphi_k)\varphi_k\right\|\leqslant|\mu_{m+1}|\,\|u\|,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=0$, 所以这表示在平均收敛的意义下, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(u,\varphi_n)\varphi_n=Gu=f,$$

其中,

$$\text{左式}=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{\lambda_n}(-Tf,\varphi_n)\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}(f,T\varphi_n)\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n.$$

进一步证明收敛在 $[a,b]$ 上还是一致的: 对于任意的 $u\in L^2[a,b]$,

$$\sum_{k=p}^{q}\mu_k(u,\varphi_k)\varphi_k=G\left(\sum_{k=p}^{q}(u,\varphi_k)\varphi_k\right).$$

由于

$$|(Gu)(x)|=\left|\int_a^b G(x,t)u(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left(\sup_{a\leqslant x,t\leqslant b}|G(x,t)|\right)\sqrt{b-a}\|u\|,$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=p}^{q}\mu_k(u,\varphi_k)\varphi_k(x)\right|&\leqslant\sqrt{b-a}\sup_{a\leqslant x,t\leqslant b}|G(x,t)|\left\|\sum_{k=p}^{q}(u,\varphi_k)\varphi_k\right\|\\&=\sqrt{b-a}\sup_{a\leqslant x,t\leqslant b}|G(x,t)|\left(\sum_{k=p}^{q}|(u,\varphi_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,\quad p,q\to\infty\end{aligned}$$

$\left(\text{由于 } \{\varphi_n | n=1,2,\cdots\} \text{ 是规范正交组, 所以 } \sum_{n=1}^{\infty} |(u,\varphi_n)|^2 \leqslant \|u\|^2\right)$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(u,\varphi_n)\varphi_n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

定理 2.4.8 $\{\varphi_n | n=1,2,\cdots\}$ 是 $L^2[a,b]$ 的规范正交基.

证明 只需证明对任意的 $f\in L^2[a,b]$, 有 $f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n$ 或 Parseval 等式 $\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\varphi_n)|^2$ 成立. 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\widetilde{f}\in C_0^{\infty}(a,b)$ 使得

$$\left\|f-\widetilde{f}\right\|<\varepsilon,$$

$\widetilde{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\widetilde{f},\varphi_n)\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致成立, 所以存在 N, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\widetilde{f}(x)-\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{f},\varphi_k)\varphi_k(x)\right|<\varepsilon,\quad x\in[a,b].$$

这样当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left\|f-\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)\varphi_k\right\| &\leqslant \left\|f-\widetilde{f}\right\|+\left\|\widetilde{f}-\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{f},\varphi_k)\varphi_k\right\|+\left\|\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{f}-f,\varphi_k)\varphi_k\right\|\\ &\leqslant 2\left\|f-\widetilde{f}\right\|+\left(\int_a^b\left|\widetilde{f}(x)-\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{f},\varphi_k)\varphi_k(x)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ &<2\varepsilon+\varepsilon\sqrt{b-a},\end{aligned}$$

所以

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n.$$

另外由

$$0\leqslant\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|(f,\varphi_k)|^2=\left\|f-\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)\varphi_k\right\|^2\to 0,\quad n\to\infty$$

得 Parseval 等式.

定理 2.4.9(Hilbert-Schmidt 核展开定理) 在$L^2([a,b]\times[a,b])$ 平均收敛的意义下, $G(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(t)}}{-\lambda_n}$.

证明 $\left\{e_n(x,t)=\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(t)}|n=1,2,\cdots\right\}$ 是 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 的规范正交组, 由 Bessel 不等式, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(G,e_n)e_n$ 在 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 中收敛到某个 S. 而

$$
\begin{aligned}
(G,e_n)&=\int_a^b\int_a^b G(x,t)\overline{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_a^b\left(\int_a^b G(x,t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t\right)\overline{\varphi_n(x)}\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b \mu_n\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}\mathrm{d}x=\mu_n=-\frac{1}{\lambda_n},
\end{aligned}
$$

于是在平均收敛的意义下,

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(t)}}{-\lambda_n}=S(x,t).
$$

要证明 $S=G$, 为此只需证明在 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 的一个稠集合 $\mathscr{D}$ 上, 有

$$
(G-S,f)=0,\quad f\in\mathscr{D}.
$$

取

$$
\mathscr{D}=\left\{f=u\overline{v}\text{ 的线性组合}|u,v\in L^2[a,b]\right\},
$$

则

$$
\begin{aligned}
(S,u\overline{v})&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{-\lambda_n}\int_a^b\int_a^b\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(t)}\overline{u(x)\overline{v(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{-\lambda_n}(\varphi_n,u)(v,\varphi_n),\\
(G,u\overline{v})&=\int_a^b\int_a^b G(x,t)\overline{u(x)\overline{v(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_a^b\overline{u(x)}\left(\int_a^b G(x,t)v(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b\overline{u(x)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(Gv,\varphi_n)\varphi_n(x)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\overline{u(x)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(v,\varphi_n)\varphi_n(x)\right)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\varphi_n,u)(v,\varphi_n),
\end{aligned}
$$

所以 $(G-S,u\overline{v})=0$.

例 2.4.3 $M=\mathrm{i}D$, $x\in[0,2\pi]$, 设 T 为 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$
\mathscr{D}(T)=\{f\in\mathscr{D}(T_1(M)|f(0)-f(2\pi))=0\}.
$$

若 $\lambda \in \sigma(T)$, 则

$$\mathrm{i}y' = \lambda y, \quad y' = -\mathrm{i}\lambda y, \quad y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}, \quad 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\lambda} = 0,$$

所以 $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 即 $\sigma(T) = \mathbf{Z}$, 与 $n \in \mathbf{Z}$ 对应的规范化特征函数是 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} | n \in \mathbf{Z}\right\}$ 是 $L^2[0, 2\pi]$ 的规范正交基. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, $f \in L^2[0, 2\pi]$(平均收敛意义下). 如果 f 连续可微, 周期 2π, 则收敛是一致的. 这是 Fourier 级数论中的结论.

第 3 章　奇型 Sturm-Liouville 算子的谱论

先考虑区间的一端为常型另一端为奇型的情形, 然后再考虑区间两端都是奇型的情形.

3.1 Weyl 圆套

考虑区间为 $[a,\infty)$ 的情形, 其余 $(-\infty,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ 的情形类似. 设

$$M=-DpD+q,\quad x\in[0,\infty),$$

这里 p,q 是实函数, $p>0$, $p'\in AC_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$, $q\in L_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$.

$$[f,g](x)=p(x)W(f,\overline{g})(x)=p(x)(f(x)\overline{g'(x)}-f'(x)\overline{g(x)}),$$

假设 $\varphi(x,\lambda)$ 与 $\theta(x,\lambda)$ 分别是下列 Cauchy 问题的解:

$$\begin{cases}My=\lambda y,\\ y(0)=\sin\alpha,\\ p(0)y'(0)=-\cos\alpha,\end{cases}\qquad\begin{cases}My=\lambda y,\\ y(0)=\cos\alpha,\\ p(0)y'(0)=\sin\alpha,\end{cases}\qquad 0\leqslant\alpha<\pi.$$

因为

$$W(\varphi,\theta)(0)=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\dfrac{\cos\alpha}{p(0)} & \dfrac{\sin\alpha}{p(0)}\end{vmatrix}=\frac{1}{p(0)}\neq 0,$$

所以 $\varphi(x,\lambda)$ 与 $\theta(x,\lambda)$ 线性无关. 由 Liouville 公式

$$W(\varphi,\theta)(x)=W(\varphi,\theta)(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x\frac{p'}{p}\mathrm{d}t}=W(\varphi,\theta)(0)\frac{p(0)}{p(x)}$$

得

$$p(x)W(\varphi,\theta)(x)=p(0)W(\varphi,\theta)(0)=1.$$

方程 $My=\lambda y$ 的解除 θ 外都可以表示成 $y(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+m\theta(x,\lambda)$ 的倍数且满足

$$y(0)=\sin\alpha+m\cos\alpha,$$
$$p(0)y'(0)=-\cos\alpha+m\sin\alpha.$$

于是 y 在 0 点满足边条件

$$\cos\alpha y(0)+\sin\alpha p(0)y'(0)=m.$$

考虑方程的那些同时还在点 $b\in(0,\infty)$ 满足边条件

$$\cos\beta y(b)+\sin\beta p(b)y'(b)=0,\quad 0\leqslant\beta<\pi$$

的解,

$$\cos\beta\varphi(b,\lambda)+\sin\beta p(b)\varphi'(b,\lambda)+m(\cos\beta\theta(b,\lambda)+\sin\beta p(b)\theta'(b,\lambda))=0.$$

于是

$$\begin{aligned}m(\lambda)&=-\frac{\cos\beta\varphi(b,\lambda)+\sin\beta p(b)\varphi'(b,\lambda)}{\cos\beta\theta(b,\lambda)+\sin\beta p(b)\theta'(b,\lambda)}\\&=\begin{cases}-\dfrac{\varphi(b,\lambda)}{\theta(b,\lambda)}, & \beta=0,\\ -\dfrac{\cot\beta\varphi(b,\lambda)+p(b)\varphi'(b,\lambda)}{\cot\beta\theta(b,\lambda)+p(b)\theta'(b,\lambda)}, & 0<\beta<\pi.\end{cases}\end{aligned}$$

因为 $\varphi(b,\lambda)$ 和 $\theta(b,\lambda)$ 都是 λ 的整函数, 所以 $m(\lambda)$ 是 λ 的半纯函数, 而且

$$\overline{m(\lambda)}=m(\overline{\lambda}).$$

如果 λ 是 $m(\lambda)$ 的极点, 则 $\theta(x,\lambda)$ 满足

$$\begin{cases}My=\lambda y,\\ \sin\alpha y(0)-\cos\alpha p(0)y'(0)=0,\\ \cos\beta y(b)+\sin\beta p(b)y'(b)=0.\end{cases}$$

如果记算子 T 为

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}(T)=\left\{y\in\mathscr{D}(T_1(M))\ \middle|\ \begin{array}{l}\sin\alpha y(0)-\cos\alpha p(0)y'(0)=0,\\ \cos\beta y(b)+\sin\beta p(b)y'(b)=0\end{array}\right\},\\ &Ty=My,\quad y\in\mathscr{D}(T),\end{aligned}$$

则 λ 是 $T_0(M|_{[0,b]})$ 的自伴延拓 T 的特征值, 因此 λ 是实的! 所以只要 $\mathrm{Im}\lambda\neq 0, m(\lambda)$ 就是确定的. 令

$$A=\varphi(b,\lambda),\quad B=p(b)\varphi'(b,\lambda),\quad C=\theta(b,\lambda),\quad D=p(b)\theta'(b,\lambda),$$

因为

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=p(b)W(\varphi,\theta)(b)=1,$$

所以$m=-\dfrac{Az+B}{Cz+D}$ 是一个分式线性变换, 它把 z 平面上的直线与圆变成 m 平面上的直线或圆. 当 β 从 0 变到 π 时, $z=\cot\beta$ 跑遍了实轴, 那么这个变换将实轴变成了什么? 知道分式线性变换把互相对称的点对仍然映成互相对称的点对①.

定理 3.1.1　如果 $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$, 实轴在分式线性变换 $m=-\dfrac{Az+B}{Cz+D}$ 下的像是 m 平面上的圆 C_b.

(1) C_b 方程是

$$[\varphi+m\theta,\varphi+m\theta](b)=0$$

或

$$\int_0^b|\varphi(x,\lambda)+m\theta(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{Im}m}{\mathrm{Im}\lambda};$$

(2) C_b 的圆心为 $m_{b0}=-\dfrac{[\varphi,\theta](b)}{[\theta,\theta](b)}$;

(3) C_b 的半径为 $r_b=\dfrac{1}{|[\theta,\theta](b)|}=\dfrac{1}{2\,|\mathrm{Im}\lambda|\displaystyle\int_0^b|\theta(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x}$;

(4) m 在 C_b 内的充要条件是 $\displaystyle\int_0^b|\varphi(x,\lambda)+m\theta(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x<\frac{\mathrm{Im}m}{\mathrm{Im}\lambda}$.

证明

$$0=\int_0^b(M\theta-\lambda\theta)\,\overline{\theta}\mathrm{d}x=-p\theta'\overline{\theta}|_0^b+\int_0^b p\,|\theta'|^2\mathrm{d}x+\int_0^b(q-\lambda)\,|\theta|^2\,\mathrm{d}x,$$

因为 $\theta(0,\lambda),\theta'(0,\lambda),\ p,q$ 都是实的, 所以由上式可得

$$\mathrm{Im}(-p(b)\theta'(b,\lambda)\overline{\theta(b,\lambda)})=\mathrm{Im}\lambda\int_0^b|\theta|^2\,\mathrm{d}x\neq 0.$$

于是 $\theta(b,\lambda)\neq 0$, 而且

$$\mathrm{Im}\left(-\frac{p(b)\theta'(b,\lambda)}{\theta(b,\lambda)}\right)=\mathrm{Im}\left(-\frac{p(b)\theta'(b,\lambda)\overline{\theta(b,\lambda)}}{|\theta(b,\lambda)|^2}\right)\neq 0,$$

即 $-\dfrac{D}{C}$ 不是实数. 这样, 分式线性变换 $m=-\dfrac{Az+B}{Cz+D}$ 便把非实数的点 $z_\infty=-\dfrac{D}{C}$ 映成了 m 平面的无穷远点, 因此实轴的像是一个圆 C_b(图 3.1).

(1) C_b 的方程

① 称 m_1,m_2 关于 $|m-m_0|=r$ 对称, 若 $|m_1-m_0|\,|m_2-m_0|=r^2$ 且 $\arg(m_1-m_0)=\arg(m_2-m_0)$. 规定 m_0 与无穷远点关于 $|m-m_0|=r$ 对称.

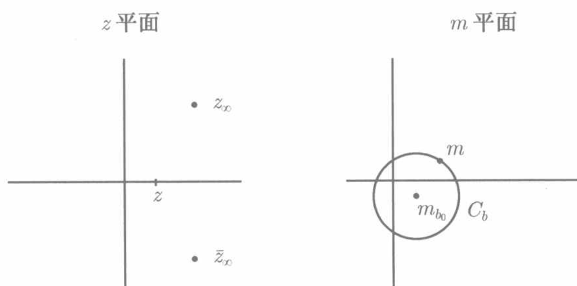


图 3.1

$$m = -\frac{Az+B}{Cz+D}, \quad z = -\frac{Dm+B}{Cm+A},$$

对 $z \in \mathbf{R}$, 有

$$-\frac{Dm+B}{Cm+A} = -\frac{\overline{D}\overline{m}+\overline{B}}{\overline{C}\overline{m}+\overline{A}},$$

$$(\overline{C}\overline{m}+\overline{A})(Dm+B) = (\overline{D}\overline{m}+\overline{B})(Cm+A),$$

$$(\overline{C}D - C\overline{D})m\overline{m} + (B\overline{C} - A\overline{D})\overline{m} + (\overline{A}D - \overline{B}C)m + (\overline{A}B - A\overline{B}) = 0,$$

这就是 C_b 的方程. 显然

$$\begin{aligned}
\overline{C}D - C\overline{D} &= p(b)\overline{\theta(b,\lambda)}\theta'(b,\lambda) - p(b)\theta(b,\lambda)\overline{\theta'(b,\lambda)} \\
&= -p(b)W(\theta,\overline{\theta})(b) = -[\theta,\theta](b), \\
B\overline{C} - A\overline{D} &= -[\varphi,\theta](b), \\
\overline{A}D - \overline{B}C &= p(b)\overline{\varphi(b,\lambda)}\theta'(b,\lambda) - p(b)\overline{\varphi'(b,\lambda)}\theta(b,\lambda) \\
&= -p(b)W(\theta,\overline{\varphi})(b) = -[\theta,\varphi](b), \\
\overline{A}B - A\overline{B} &= -[\varphi,\varphi](b),
\end{aligned}$$

这样便有

$$-[\theta,\theta](b)m\overline{m} - [\varphi,\theta](b)\overline{m} - [\theta,\varphi](b)m - [\varphi,\varphi](b) = 0,$$

即

$$[\varphi + m\theta, \varphi + m\theta](b) = 0$$

或

$$[y,y]\,(b) = 0.$$

利用 Green 公式则有

$$\int_0^b (\overline{y}My - y\overline{My})\mathrm{d}x = [y,y]_0^b,$$

即

$$[y,y](b)=[y,y](0)+(\lambda-\overline{\lambda})\int_0^b|y|^2\,\mathrm{d}x.$$

而

$$\begin{aligned}[y,y](0)&=[\varphi+m\theta,\varphi+m\theta](0)=[\varphi,\varphi](0)+m[\theta,\varphi](0)+\overline{m}[\varphi,\theta](0)+|m|^2[\theta,\theta](0)\\&=mp(0)W(\theta,\overline{\varphi})(0)+\overline{m}p(0)W(\varphi,\overline{\theta})(0)\\&=-m+\overline{m}=-2\mathrm{i}\mathrm{Im}m,\end{aligned}$$

故 C_b 的方程是

$$\int_0^b|\varphi(x,\lambda)+m\theta(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{Im}m}{\mathrm{Im}\lambda}.$$

(2) C_b 的圆心.

把 C_b 的原始方程与圆方程 $|m-m_{b0}|=r_b$, 即 $(m-m_{b0})(\overline{m}-\overline{m}_{b0})=r_b^2$ 作比较得

$$m_{b0}=\frac{A\overline{D}-B\overline{C}}{\overline{C}D-C\overline{D}}=\frac{-\overline{[\theta,\varphi](b)}}{-[\theta,\theta](b)}=-\frac{[\varphi,\theta](b)}{[\theta,\theta](b)}$$ ①

(3) C_b 的半径.

$z=0$ 的像在 C_b 上, 即 $-\dfrac{B}{D}\in C_b$, 所以

$$r_b=\left|-\frac{B}{D}-\frac{A\overline{D}-B\overline{C}}{\overline{C}D-C\overline{D}}\right|=\left|\frac{AD-BC}{\overline{C}D-C\overline{D}}\right|.$$

因为

$$AD-BC=p(b)W(\varphi,\theta)(b)=1,$$

故

$$r_b=\frac{1}{|\overline{C}D-C\overline{D}|}=\frac{1}{|[\theta,\theta](b)|}.$$

由 Green 公式得

$$\int_0^b(\overline{\theta}M\theta-\theta\overline{M\theta})\mathrm{d}x=[\theta,\theta]\,\big|_0^b=[\theta,\theta](b),$$

而

$$\text{左式}=(\lambda-\overline{\lambda})\int_0^b|\theta|^2\,\mathrm{d}x=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\lambda\int_0^b|\theta|^2\,\mathrm{d}x,$$

---

① 由于分式线性变换把对称点映成对称点, 而它把 z_∞ 映成无穷远点, 所以 $m_{b0}=-\dfrac{A\overline{z}_\infty+B}{C\overline{z}_\infty+D}=\dfrac{A\overline{D}-B\overline{C}}{\overline{C}D-C\overline{D}}$, $\overline{z}_\infty=-\dfrac{\overline{D}}{\overline{C}}$.

于是

$$r_b = \frac{1}{2\left|\mathrm{Im}\lambda\right|\displaystyle\int_0^b \left|\theta(x,\lambda)\right|^2 \mathrm{d}x}.$$

(4) m 在 C_b 内的充要条件.

C_b 的方程是

$$\int_0^b |\varphi(x,\lambda)+m\theta(x,\lambda)|^2 \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Im}m}{\mathrm{Im}\lambda},$$

即

$$m\overline{m}\int_0^b \left|\theta\right|^2 \mathrm{d}x + m\int_0^b \overline{\varphi}\theta \mathrm{d}x + \overline{m}\int_0^b \varphi\overline{\theta}\mathrm{d}x + \int_0^b \left|\varphi\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Im}m}{\mathrm{Im}\lambda},$$

对比 $|m-m_{b0}| = r_b$ 可知

$$\begin{aligned} & m \text{ 在 } C_b \text{ 内} \\ \Leftrightarrow & |m-m_{b0}| < r_b \Leftrightarrow \left|m-m_{b0}\right|^2 < r_b^2 \\ \Leftrightarrow & m\overline{m} - m\overline{m}_{b0} - \overline{m}m_{b0} + m_{b0}\overline{m}_{b0} - r_b^2 < 0, \end{aligned}$$

于是 m 在 C_b 内 $\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^b |\varphi(x,\lambda)+m\theta(x,\lambda)|^2 \mathrm{d}x < \frac{\mathrm{Im}m}{\mathrm{Im}\lambda}$.

定理 3.1.2 如果 $b' > b$, 则 $C_{b'} \subset C_b$, 所以 $\{C_b | b > 0\}$ 组成了 m 平面里的圆套.

证明 由

$$m \text{ 在 } C_b \text{ 内} \Leftrightarrow \int_0^b |\varphi(x,\lambda)+m\theta(x,\lambda)|^2 \mathrm{d}x < \frac{\mathrm{Im}m}{\mathrm{Im}\lambda}$$

可得.

得到了 $My = \lambda y$ 当 $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 时的两个线性无关的解,

$$\theta(x,\lambda), y(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + m(\lambda)\theta(x,\lambda), \quad m(\lambda) \in C_b(\lambda),$$

这里 $\theta(x,\lambda)$ 满足边条件

$$\sin\alpha y(0) - \cos\alpha p(0) y'(0) = 0, \quad \alpha \in [0,\pi),$$

而 $y(x,\lambda)$ 满足边条件

$$\cos\beta y(b) + \sin\beta p(b) y'(b) = 0, \quad \beta \in [0,\pi),$$

随着 $m(\lambda)$ 取遍 C_b, β 将取遍 $[0,\pi)$.

3.2 Weyl 极限点与极限圆

根据 1.3 节, Sturm-Liouville 微分算子 $T_0(M)$ 的亏指数只可能是 (1, 1) 和 (2, 2). $My=\lambda y(\mathrm{Im}\lambda\neq 0)$ 的解都可以表示成 $\theta(x,\lambda)$ 和 $\varphi(x,\lambda)+m(\lambda)\theta(x,\lambda)$, $m\in C_b$ 的线性组合. 要考察这些解, 看看属于 $L^2[0,\infty)$ 的究竟有几个? 根据定理 3.1.2, $\{C_b\,|b>0\}$ 是一个圆套, 半径 r_b 是 b 严格下降函数 $\left(r_b=\dfrac{1}{2\,|\mathrm{Im}\lambda|\displaystyle\int_0^b|\theta(x,\lambda)|^2\mathrm{d}x}\right)$, 当 $b\to\infty$ 时, 它趋于一个非负的极限. 这样便产生了两种情形:

极限值 >0, 圆套收缩成一个 "圆" C_∞ 连同内部 $=\bigcap\limits_{b>0}$ (C_b 连同内部);

极限值 $=0$, 圆套收缩成一个点 m_∞.

在第 1 种情形,

$$\lim_{b\to\infty}r_b=r_\infty>0,\quad 即\ \frac{1}{2\,|\mathrm{Im}\lambda|\displaystyle\int_0^\infty|\theta(x,\lambda)|^2\mathrm{d}x}=r_\infty,$$

所以

$$\int_0^\infty|\theta(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\,|\mathrm{Im}\lambda|\,r_\infty},$$

即 $\theta\in L^2[0,\infty)$. 如果 $\widehat{m}_\infty$ 是 C_∞ 上的一点, 则对一切 $b>0$ 都有 $\widehat{m}_\infty$ 在 C_b 内. 因此

$$\int_0^b|\varphi(x,\lambda)+\widehat{m}_\infty\theta(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x<\frac{\mathrm{Im}\widehat{m}_\infty}{\mathrm{Im}\lambda},\quad b>0,$$

所以

$$\varphi+\widehat{m}_\infty\theta\in L^2[0,\infty),$$

从而 $\varphi\in L^2[0,\infty)$. 这样 $My=\lambda y$ 的一切解便都平方可积.

对第 2 种情形,

$$\lim_{b\to\infty}r_b=0,$$

所以

$$\int_0^\infty|\theta(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x=\infty,$$

即 $\theta\notin L^2[0,\infty)$, 由于 m_∞ 在所有的圆 C_b $(b>0)$ 内, 所以

$$\varphi+m_\infty\theta\in L^2[0,\infty),$$

于是 $My=\lambda y$ 的两个线性无关解中有一个属于 $L^2[0,\infty)$, 而另一个不属于 $L^2[0,\infty)$.

总结一下, 得到下述定理:

定理 3.2.1 设 $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, φ, θ 是 $My = \lambda y$ 的满足初始条件

$$\begin{cases} \varphi(0,\lambda) = \sin\alpha, \\ p(0)\varphi'(0,\lambda) = -\cos\alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta(0,\lambda) = \cos\alpha, \\ p(0)\theta'(0,\lambda) = \sin\alpha, \end{cases} \quad 0 \leqslant \alpha < \pi$$

的两个线性无关的解, 则 $b \to \infty$ 时, C_b 收缩成一个圆 C_∞ 或点 m_∞.

(1) C_∞ 情形: $My = \lambda y$ 的一切解均属于 $L^2[0,\infty)$,

$$\widehat{m}_\infty \in C_\infty \Leftrightarrow \int_0^\infty |\varphi + \widehat{m}_\infty \theta|^2 \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Im}\widehat{m}_\infty}{\mathrm{Im}\lambda},$$

后者即 $[\varphi + \widehat{m}_\infty\theta, \varphi + \widehat{m}_\infty\theta](\infty) = 0$, 这是一个圆的方程.

(2) m_∞ 情形: $My = \lambda y$ 仅有一个线性无关解,

$$\varphi + m_\infty\theta \in L^2[0,\infty); \quad m_\infty = -\lim_{b\to\infty} \frac{\varphi(b,\lambda)}{\theta(b,\lambda)}.$$

证明 (1) $\widehat{m}_\infty \in C_\infty \Leftrightarrow \exists b_n \uparrow \infty, m_{b_n} \in C_{b_n}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} m_{b_n} = \widehat{m}_\infty$, 故由

$$\int_0^{b_n} |\varphi + m_{b_n}\theta|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Im}m_{b_n}}{\mathrm{Im}\lambda},$$

$$\int_0^{b_n} |\varphi|^2 \mathrm{d}x + m_{b_n}\int_0^{b_n} \theta\overline{\varphi}\mathrm{d}x + \overline{m_{b_n}}\int_0^{b_n} \varphi\overline{\theta}\mathrm{d}x + |m_{b_n}|^2\int_0^{b_n} |\theta|^2\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Im}m_{b_n}}{\mathrm{Im}\lambda}$$

得

$$\int_0^\infty |\varphi + \widehat{m}_\infty\theta|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Im}\widehat{m}_\infty}{\mathrm{Im}\lambda}.$$

后者便是 C_∞ 的方程.

(2) 对任意的 $m_b \in C_b$ 都有 $\lim\limits_{b\to\infty} m_b = m_\infty$. 特别地取 $\beta = 0$ 得 $m_b = -\dfrac{\varphi(b,\lambda)}{\theta(b,\lambda)}$, 故 $m_\infty = -\lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{\varphi(b,\lambda)}{\theta(b,\lambda)}$.

联系到亏指数的定义, 这表示 $d_+, d_- = 1$ 或 2, 不可能是 0.

定理 3.2.2 如果对某个 λ_0, 方程 $My = \lambda_0 y$ 的一切解均属于 $L^2[0,\infty)$, 则对于任何 $\lambda \in C$, $My = \lambda y$ 的一切解也都属于 $L^2[0,\infty)$.

证明 设 $u_1(x), u_2(x)$ 是 $My = \lambda_0 y$ 的两个线性无关的属于 $L^2[0,\infty)$ 的解, 适当乘 u_1, u_2 以常数, 可以假定

$$p(0)W(u_1,u_2)(0) = 1.$$

于是由 Liouville 公式,

$$p(x)W(u_1,u_2)(x) = 1, \quad x \in [0,\infty).$$

设 v 是 $My=\lambda y$ 的一个解, 将 $Mv=\lambda v$ 改写为

$$Mv-\lambda_0 v=(\lambda-\lambda_0)v,$$

用常数变易法解此非齐次方程, 令

$$v(x)=c_1(x)u_1(x)+c_2(x)u_2(x),$$

则由联立方程

$$\begin{cases} c_1'(x)u_1(x)+c_2'(x)u_2(x)=0, \\ p(x)(c_1'(x)u_1'(x)+c_2'(x)u_2'(x))=-(\lambda-\lambda_0)v(x), \end{cases}$$

解得

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2(x) \\ -(\lambda-\lambda_0)v(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}}{p(x)W(u_1,u_2)(x)}=(\lambda-\lambda_0)u_2(x)v(x),$$

$$c_2'(x)=\begin{vmatrix} u_1(x) & 0 \\ u_1'(x) & -(\lambda-\lambda_0)v(x) \end{vmatrix}=-(\lambda-\lambda_0)u_1(x)v(x).$$

于是

$$c_1(x)=\int_a^x(\lambda-\lambda_0)u_2(t)v(t)\mathrm{d}t+c_1,$$

$$c_2(x)=-\int_a^x(\lambda-\lambda_0)u_1(t)v(t)\mathrm{d}t+c_2,$$

其中, $a\in[0,\infty)$. 这样对 $x\in[a,\infty)$ 便有

$$v(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+(\lambda-\lambda_0)\int_a^x(u_1(x)u_2(t)-u_1(t)u_2(x))v(t)\mathrm{d}t.$$

记

$$\|v\|(x)=\left(\int_a^x|v(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

由于 $u_1,u_2\in L^2[0,\infty), M_a=\max\left\{\left(\int_a^\infty|u_1(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\left(\int_a^\infty|u_2(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right\}<\infty,$
于是

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x(u_1(x)u_2(t)-u_1(t)u_2(x))v(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_a^x(|u_1(x)||u_2(t)|+|u_1(t)||u_2(x)|)|v(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant (|u_1(x)|\|u_2\|(x)+\|u_1\|(x)|u_2(x)|)\|v\|(x) \\ &\leqslant M_a(|u_1(x)|+|u_2(x)|)\|v\|(x).\end{aligned}$$

特别地, 对任意的 $T>0$, $x\in[a,T]$,

$$\text{上式}\ \leqslant M_a(|u_1(x)|+|u_2(x)|)\|v\|(T).$$

这样

$$\begin{aligned}\|v\|(x)\leqslant& |c_1|\,\|u_1\|\,(x)+|c_2|\,\|u_2\|\,(x)+|\lambda-\lambda_0|M_a\|v\|(T)\left(\int_a^x(|u_1(t)|+|u_2(t)|)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\\ \leqslant& (|c_1|+|c_2|)M_a+(\lambda-\lambda_0)M_a\|v\|(T)\left(2\int_a^x|u_1(t)|^2\,\mathrm{d}t+2\int_a^x|u_2(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\\ \leqslant& (|c_1|+|c_2|)M_a+2|\lambda-\lambda_0|M_a^2\|v\|(T),\quad \forall x\in[a,T],\end{aligned}$$

所以

$$\|v\|(T)\leqslant(|c_1|+|c_2|)M_a+2|\lambda-\lambda_0|M_a^2\|v\|(T),$$

若取 a 充分大, 使得

$$|\lambda-\lambda_0|\,M_a^2<\frac14,$$

则得

$$\|v\|(T)\leqslant 2(|c_1|+|c_2|)M_a,$$

T 任意, 所以 $v\in L^2[0,\infty)$.

定义 3.2.1 M 称为在 ∞ 处是极限圆的, 如果有 $\lambda_0\in\mathbf{C}$ 使得方程 $My=\lambda_0 y$ 的一切解都属于 $L^2[0,\infty)$, 否则称 M 在 ∞ 处是极限点的.

定理 3.2.2 表明 M 的极限圆, 极限点分类与 $\lambda\in\mathbf{C}$ 无关, 是方程的系数唯一确定的.

推论 3.2.1 以下各条等价:

(1) M 在 ∞ 是极限圆的;

(2) $My=0$ 的一切解均平方可积;

(3) $T_0(M)$ 的亏指数为 (2, 2).

推论 3.2.2 以下各条等价:

(1) M 在 ∞ 是极限点的;

(2) $My=0$ 至少有一个平方不可积的解;

(3) $T_0(M)$ 的亏指数为 (1, 1).

例 3.2.1 $M=-D^2,\ \ x\in[0,\infty)$.

因为 $-y''=0$ 的基本解组 $\{1,x\}$ 都平方不可积, 所以 $T_0(M)$ 的亏指数为 (1, 1) . 而 M 在 ∞ 是极限点的.

找出 Sturm-Liouville 微分算式 M 是极限圆或极限点其系数 p, q 所满足的充要条件, 这是微分算子谱理论的一个基本问题, 迄今未得解决. 3.3 节再回到这一问题.

推论 3.2.3　设 G 是 λ 平面上的有界区域, 如果存在 $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, 使得 $My = \lambda_0 y$ 有两个线性无关的平方可积解 φ_0 和 θ_0, 则 $My = \lambda y$ 的任何解 $y(x, \lambda)$ 满足 $\|y(\cdot, \lambda)\|$ 在 G 上一致有界.

证明　适当乘以常数, 可以假定 φ_0 和 θ_0 满足

$$p(x)W(\varphi_0, \theta_0)(x) = 1.$$

设 y 为方程 $My = \lambda y$ 的一个解, 由常数变易法可得 y 的具体形式

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) = {} & c_1\varphi_0(x, \lambda_0) + c_2\theta_0(x, \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)\int_a^x (\varphi_0(x, \lambda_0)\theta_0(t, \lambda_0) \\ & -\varphi_0(t, \lambda_0)\theta_0(x, \lambda_0))y(t, \lambda)\mathrm{d}t, \quad a \in [0, \infty). \end{aligned}$$

记

$$\|y\|(x, \lambda) = \left(\int_a^x |y(t, \lambda)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$M_a = \max\left\{\left(\int_a^\infty |\varphi_0(x, \lambda_0)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\int_a^\infty |\theta_0(x, \lambda_0)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

则

$$\|y\|(x, \lambda) \leqslant 2(|c_1| + |c_2|)M_a,$$

所以

$$\left(\int_a^\infty |y(t, \lambda)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2(|c_1| + |c_2|)M_a.$$

由于

$$\begin{cases} y(a, \lambda) = c_1\varphi_0(a, \lambda_0) + c_2\theta_0(a, \lambda_0), \\ y'(a, \lambda) = c_1\varphi_0'(a, \lambda_0) + c_2\theta_0'(a, \lambda_0), \end{cases}$$

故

$$c_1(\lambda) = \begin{vmatrix} y(a, \lambda) & \theta_0(a, \lambda_0) \\ p(a)y'(a, \lambda) & p(a)\theta_0'(a, \lambda_0) \end{vmatrix},$$

$$c_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_0(a, \lambda_0) & y(a, \lambda) \\ p(a)\varphi_0'(a, \lambda_0) & p(a)y'(a, \lambda) \end{vmatrix}$$

都是 λ 的整函数, 在 G 上一致有界. 于是

$$\|y(\cdot, \lambda)\|^2 = \int_0^a |y(t, \lambda)|^2 \mathrm{d}t + \int_a^\infty |y(t, \lambda)|^2 \mathrm{d}t$$

也在 G 上一致有界.

3.3 Weyl 点, 圆的判别

正如在前面讲到的, 亏指数问题跟微分方程定解问题的适定性有很大关系, 所以亏指数的判定一直是常微分算子谱论的一个重要内容.

自 1910 年 H. Weyl 的博士论文发表以来, 关于 Sturm-Liouville 算子

$$M = -DpD + q, \quad x \in [a, \infty), \quad p > 0 \text{ 连续可微}, q \text{ 连续}$$

亏指数判别的研究积累了大量的文献. 特别是 20 世纪 70 年代, 得到很多形式的充分判别原则, 有人曾夸张地说几乎一切能到手的这类算子都能用现有的判别法去判别它们. 但是这方面的工作并没有停止, 因为即便是对这个简单的微分算子, 也还没有极限点情形系数所满足的充分必要条件.

由 H.Weyl 著名的点圆分类定理知道, 如果存在某个复数 λ_0, 使得方程 $My = \lambda_0 y$ 的一切解都在 $[a, \infty)$ 上可积, 那么对任何复数 λ 方程 $My = \lambda y$ 的一切解也都是平方可积的. 因此为了判别 M 究竟是属于极限点还是极限圆, 只需检验方程 $My = 0$ 解的平方可积性质即可. 这样便马上得到一个重要的结论.

定理 3.3.1 M 是极限点的充分必要条件是方程 $My = 0$ 至少有一个不平方可积的解.

几乎所有的极限点判别原则都是从它出发去考虑的, 其中, 最简单的一个是

定理 3.3.2 如果 q 非负, 则 M 是极限点的.

证明 设 y 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My = 0, \\ y(a) = 0, \quad y'(a) = 1 \end{cases}$$

的解, 如果 y 在 (a, ∞) 上还有零点, 由连续性和 $y'(a) > 0$, 必存在一个最小的零点 $b > a$. 于是 y 在 (a, b) 上大于零且存在 $c \in (a, b)$, 使得 $y'(c) = 0$. 这样通过在 $[a, c]$ 上积分

$$\int_a^c (py')'\mathrm{d}x = \int_a^c qy\mathrm{d}x,$$

应有

$$p(c)y'(c) = p(a)y'(a) + \int_a^c qy\mathrm{d}x \geqslant p(a) > 0,$$

与 $y'(c) = 0$ 矛盾, 所以 y 在 (a, ∞) 上永远是正的. 不仅如此, 还得到 y' 在整个 (a, ∞) 上也是正的, 否则 y' 在 (a, ∞) 将有一零点 c. 同样地, 在 $[a, c]$ 上取积分也要导致矛盾. 由于 y 和 y' 都在 (a, ∞) 上大于零, 所以 y 不平方可积, 因此 M 是极限点的.

推论 3.3.1 (Weyl) 如果 q 有下界, 则 M 是极限点的.

证明 利用定理 1.2.2 可得.

以下考虑 q 没有下界的情形. 为了使 M 是极限点的, 必须对 q 趋于 $-\infty$ 的速度加以某些限制. 这种限制可以通过积分的收敛, 通过 q 属于什么样的空间 $L^p[a,\infty)$ 来实现, 下面是一个 40 年代得到的结果.

定理 3.3.3 (Putnam) 若 $q \in L^2[a,\infty)$, 则 M 是极限点的.

证明 如果 y 是 $My=0$ 平方可积的解, 则 qy 是可积的. 于是由

$$p(x)y'(x) = p(a)y'(a) + \int_a^x qy\mathrm{d}t$$

可知极限 $\lim\limits_{x\to\infty} p(x)y'(x)$ 存在.

假设 u 和 v 是方程 $My=0$ 满足 $p(a)[u'(a)v(a)-u(a)v'(a)]=1$ 的两个线性无关的解, 因为 $[p(u'v-uv')]'=0$, 所以

$$p(x)[u'(x)v(x)-u(x)v'(x)]=1.$$

如果 u,v 都平方可积, 则由

$$1=|p(u'v-uv')|\leqslant |pu'||v|+|u||pv'|\leqslant K(|u|+|v|)$$

将导致矛盾, 故 u,v 中至少有一个不平方可积, 因此 M 是极限点的.

推论 3.3.2 如果 $q\in L^\alpha[a,\infty), \alpha\geqslant 2$, 则 M 是极限点的.

证明 令

$$q_1(x)=\begin{cases} 1, & q(x)>1, \\ q(x), & |q(x)|\leqslant 1, \\ -1, & q(x)<-1. \end{cases}$$

显然 $q_1(x)$ 是有界连续的, 而 $q_2=q-q_1$ 满足

$$\begin{aligned}\int_a^\infty |q_2(x)|^2\mathrm{d}x &= \int_{q(x)>1} |q(x)-1|^2\mathrm{d}x + \int_{q(x)<-1} |q(x)+1|^2\mathrm{d}x \\ &\leqslant 4\int_a^\infty |q(x)|^\alpha \mathrm{d}x<\infty,\end{aligned}$$

所以由定理 3.3.3 与定理 1.2.2 知 M 是极限点的.

实际上, 如果把 $q(x)$ 分解成正部 $q_+(x)$ 与负部 $q_-(x)$ 的代数和 $q_+(x)-q_-(x)$, 其中,

$$q_+(x)=\max\{q(x),0\}, \quad q_-(x)=\max\{-q(x),0\}.$$

要考虑的只是 $q_-(x)$ 增长的速度, Weyl 推论现在可以写成: 若 $q_-\in L^\infty[a,\infty)$, 则 M 是极限点的. 1974 年 W. T. Patula 与 P. Waltman 证明了: 若 $q_-\in L^2[a,\infty)$, 则

M 是极限点的. 在附加一点对 p 的限制后他们证明了当 $q_- \in L^{\alpha}[a,\infty), \alpha \geqslant 1$ 时, M 也是极限点的. 人们猜测即使不附加对 p 的限制, 结论也可能是对的, 但至今问题未见解决.

下面证明一条较为精细的判别原则, 它可以用来研究某些二阶 Sturm-Liouville 算子, 其 $q(x)$ 可以振荡, 在一串子区间上取很大的负值, 而且它还可以用来概括众多的判别原则, 这是 1949 年著名的 N. Levinson 判别准则技巧的发展.

定理 3.3.4 (Read) 假设存在 $[a,\infty)$ 上非负的局部绝对连续函数 $w(x)$ 和分解式 $q(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)$, 使得

(1) $q_1 \geqslant 0$ 且对于某个正数 δ 有常数 K, 使 $(1+\delta)pw'^2 - q_1w^2 \leqslant K$①;

(2) $-q_2w^2 \leqslant K$;

(3) 有 d $(0 \leqslant d \leqslant 1)$, 使 $w^d p^{-\frac{1}{2}}|Q| \leqslant K$, 其中, $Q' = q_3w^{1-d}$;

(4) $\displaystyle\int_a^{\infty} w^2 \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \infty$,

则 M 为极限点的.

证明 首先证明如果 y 是 $My = 0$ 的一个平方可积的解, 则积分 $\displaystyle\int_a^{\infty}(py'^2 + q_1y^2)w^2\mathrm{d}x$ 收敛. 因为

$$-(py')'yw^2 + (q_1+q_2+q_3)y^2w^2 = 0,$$

所以

$$-\int_a^x (py')'yw^2\mathrm{d}t + \int_a^x (q_1+q_2+q_3)y^2w^2\mathrm{d}t = 0,$$

而

$$-\int_a^x (py')'yw^2\mathrm{d}t = -py'yw^2|_a^x + \int_a^x (py')(y'w^2 + 2yww')\mathrm{d}t,$$

故

$$\int_a^x (py'^2 + q_1y^2)w^2\mathrm{d}t = py'yw^2|_a^x - 2\int_a^x py'yww'\mathrm{d}t - \int_a^x (q_2+q_3)y^2w^2\mathrm{d}t.$$

现在来估计上式的右端. 取 $\theta < 1$ 使得 $(1+\delta)\theta > 1$, 再取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, 使得

$$K_1 = \frac{1}{(1+\delta)\theta} + \varepsilon_1 = \theta + \frac{\varepsilon_2}{2(1+\delta)} < 1.$$

利用 Cauchy 不等式与不等式 $2\alpha\beta \leqslant \eta\alpha^2 + \dfrac{1}{\eta}\beta^2$ 可得

$$\begin{aligned}-2\int_a^x py'yww'\mathrm{d}t &\leqslant 2\left(\int_a^x py'^2w^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^x py^2w'^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{1}{(1+\delta)\theta}\int_a^x py'^2w^2\mathrm{d}t + (1+\delta)\theta\int_a^x py^2w'^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

① 不等式在除去一个零测集以外的点上都成立.

而

$$
\begin{aligned}
-\int_a^x q_3 y^2 w^2 \mathrm{d}t &= -\int_a^x q_3 w^{1-d} y^2 w^{1+d} \mathrm{d}t \\
&= -Qy^2 w^{1+d}|_a^x + \int_a^x Q[2yy'w^{1+d} + (1+d)y^2 w^d w']\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中,

$$
\begin{aligned}
\int_a^x Q2yy'w^{1+d}\mathrm{d}t &\leqslant 2\int_a^x w^d p^{-\frac{1}{2}}|Q|p^{\frac{1}{2}}|yy'|w\mathrm{d}t \leqslant 2K\int_a^x p^{\frac{1}{2}}|yy'|w\mathrm{d}t \\
&\leqslant \varepsilon_1 \int_a^x py'^2 w^2 \mathrm{d}t + \frac{K^2}{\varepsilon_1}\int_a^x y^2 \mathrm{d}t, \\
(1+d)\int_a^x Qy^2 w^d w' \mathrm{d}t &\leqslant (1+d)\int_a^x w^d p^{-\frac{1}{2}}|Q|p^{\frac{1}{2}} y^2|w'|\mathrm{d}t \leqslant (1+d)K\int_a^x p^{\frac{1}{2}} y^2 |w'|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{\varepsilon_2}{2}\int_a^x py^2 w'^2 \mathrm{d}t + \frac{(1+d)^2 K^2}{2\varepsilon_2}\int_a^x y^2 \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\int_a^x (py'^2 + q_1 y^2)w^2 \mathrm{d}t \leqslant{} & (py'yw^2 - Qy^2 w^{1+d})|_a^x - \int_a^x q_2 y^2 w^2 \mathrm{d}t + K_1 \int_a^x py'^2 w^2 \mathrm{d}t \\
& + (1+\delta)K_1 \int_a^x py^2 w'^2 \mathrm{d}t + \left[\frac{K^2}{\varepsilon_1} + \frac{(1+d)^2 K^2}{2\varepsilon_2}\right]\int_a^x y^2 \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

于是由条件 (1) 与 (2) 可得

$$
\begin{aligned}
(1-K_1)\int_a^x (py'^2 + q_1 y^2)w^2 \mathrm{d}t &= \int_a^x (py'^2 + q_1 y^2)w^2 \mathrm{d}t - K_1 \int_a^x py'^2 w^2 \mathrm{d}t - K_1 \int_a^x q_1 y^2 w^2 \mathrm{d}t \\
&\leqslant (py'yw^2 - Qy^2 w^{1+d})|_a^x + K_1 \int_a^x [(1+\delta)pw'^2 - q_1 w^2]y^2 \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_a^x (K_2 - q_2 w^2)y^2 \mathrm{d}t \\
&\leqslant K_3 \int_a^x y^2 \mathrm{d}t + (py'yw^2 + w^d p^{-\frac{1}{2}}|Q|p^{\frac{1}{2}} y^2 w)|_a^x \\
&\leqslant K_3 \int_a^x y^2 \mathrm{d}t + (py'yw^2 + Kp^{\frac{1}{2}} y^2 w)|_a^x.
\end{aligned}
$$

如果当 x 充分大时, $py'yw^2 + Kp^{\frac{1}{2}}y^2w \leqslant 0$, 该积分自然收敛. 如果在某个区间 $[x_0, \infty)$ 上 $py'yw^2 + Kp^{\frac{1}{2}}y^2w$ 有正的下界 c, 因为 y 平方可积, y 与 y' 不能总是同号, 故考虑集合

$$N = \{x | x \geqslant x_0, yy' < 0\}.$$

在这个集合上,

$$Kp^{\frac{1}{2}}y^2w > c - py'yw^2 = c + |py'yw^2| > |py'yw^2| = -py'yw^2$$

且

$$Kp^{\frac{1}{2}}y^2w > c,$$

即

$$\frac{K}{p^{\frac{1}{2}}w} > -\frac{y'}{y}, \quad \frac{K}{p^{\frac{1}{2}}w} < \frac{K^2}{c}y^2,$$

由此得

$$-\int_N \frac{y'}{y}\mathrm{d}t \leqslant \frac{K^2}{c}\int_N y^2\mathrm{d}t < \infty.$$

这样便有

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'}{y}\mathrm{d}t \geqslant \int_{[x_0,x]\cap N} \frac{y'}{y}\mathrm{d}t \geqslant \int_N \frac{y'}{y}\mathrm{d}t \geqslant -k,$$

即

$$\ln\left|\frac{y(x)}{y(x_0)}\right| \geqslant -k,$$

因此当 $x \geqslant x_0$ 时, $|y(x)| \geqslant |y(x_0)|\mathrm{e}^{-k}$, 这与 y 平方可积矛盾, 故必存在一串严格递增趋于 ∞ 的点列 $\{x_n\}$, 使得

$$py'yw^2 + Kp^{\frac{1}{2}}y^2w \to 0, \quad n \to \infty,$$

这样便可得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-K_1)\int_a^{x_n}(py'^2+q_1y^2)w^2\mathrm{d}t$ 存在, 即积分 $\int_a^{\infty}(py'^2+q_1y^2)\cdot w^2\mathrm{d}t$ 收敛.

如果 u 和 v 是方程 $My=0$ 满足 $p(u'v-uv')=1$ 的两个线性无关解, 则由

$$\begin{aligned}2w^2\left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} &= 2w^2(q_1p)^{\frac{1}{2}}(u'v-uv') \\ &= 2(wp^{\frac{1}{2}}u')\left(wq_1^{\frac{1}{2}}v\right) - 2(wp^{\frac{1}{2}}v')\left(wq_1^{\frac{1}{2}}u\right) \\ &\leqslant w^2p(u'^2+v'^2) + w^2q_1(u^2+v^2),\end{aligned}$$

注意到上面证明的结果及条件 (4) 便知 u, v 中必有一个不平方可积, 因此 M 是极限点的, 定理证毕.

这个定理还可以有另一种形式.

定理 3.3.5 (Read) 假设存在 $[a,\infty)$ 上非负的局部绝对连续函数 $w(x)$ 和分解式

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x),$$

使得定理 3.3.4 中的 (1)~(3) 满足且

(4)′ $\int_a^\infty wp^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\infty$,

则 M 为极限点的.

证明 令 $G=\{x|w(x)>0\}$, 由 w 的连续性知 G 是一个开集. 如果 G 有某个无界的构成区间 (x_0,∞), 则在 $[x_0+1,\infty)$ 上取

$$Q_1=q_1+\frac{1}{w^2},\quad Q_2=q_2-\frac{1}{w^2},\quad Q_3=q_3,$$

而在 $[a,x_0+1)$ 上取

$$Q_j=q_j,\quad j=1,2,3,$$

则对分解式 $q=Q_1+Q_2+Q_3$ 来说, 因为 $Q_3=q_3$, 而在 $[x_0+1,\infty)$ 上,

$$(1+\delta)pw'^2-Q_1w^2=(1+\delta)pw'^2-q_1w^2-1,$$

$$-Q_2w^2=-q_2w^2+1,$$

所以定理 3.3.4 里的条件 (1)~(3) 都成立. 最后, 由于在 $[x_0+1,\infty)$ 上,

$$w^2\left(\frac{Q_1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant w^2\left(\frac{1}{w^2p}\right)^{\frac{1}{2}}=wp^{-\frac{1}{2}},$$

条件 (4) 也满足, 故 M 为极限点的.

如果 G 的构成区间 J_n 都是有界的, 那么在每个 J_n 上选取子区间 I_n, 使得

$$\int_{I_n}wp^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_{J_n}wp^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

在集合 $\bigcup\limits_n I_n$ 上定义 Q_1,Q_2,Q_3 如前, 在其余地方令 $Q_j=q_j,j=1,2,3$, 同样地, 对分解式 $q=Q_1+Q_2+Q_3$ 来说, 定理 3.3.4 中条件 (1)~(3) 都成立, 而由于在 $\bigcup\limits_n I_n$ 上,

$$w^2\left(\frac{Q_1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant wp^{-\frac{1}{2}},$$

故

$$\begin{aligned}\int_a^\infty w^2\left(\frac{Q_1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x&\geqslant\int_{\cup_n I_n}wp^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_{\cup_n J_n}wp^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_G wp^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^\infty wp^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\infty,\end{aligned}$$

条件 (4) 也满足, 所以 M 为极限点的.

推论 3.3.3 (Levinson) 如果存在正的局部绝对连续函数 $W(x)$, 使得

(1) pW'^2W^{-3} 有上界;

(2) qW^{-1} 有下界;

(3) $\int_a^{\infty}(pW)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\infty$,

则 M 是极限点的.

证明 取 $w=\dfrac{1}{\sqrt{W}}$, $q_1=0$, $q_2=q$, $q_3=0$.

例 3.3.1 在 $[1,\infty)$ 上考虑正则微分算式 $My\equiv -y''-x^{\alpha}y$.

取 $w=\dfrac{1}{x},q_1=0,q_2=-x^{\alpha},q_3=0$, 则条件 (1), (3), (4)$'$ 都满足, 条件 (2) 变成 $x^{\alpha-2}$ 有界, 所以 $\alpha\leqslant 2$ 时, M 为极限点的, 下面将证明 $\alpha>2$ 时它是极限圆的.

特别地, 取同样的 w 与 q_1,q_2,q_3, 可以证明

推论 3.3.4 (Hartman-Wintner-Titchmarsh) 如果对充分大的 x, $q(x)>-Kx^2$, $K>0$, 则 $-y''+qy$ 在 $[1,\infty)$ 上是极限点的.

这也是一种控制 $q(x)$ 趋于 $-\infty$ 的速度的形式. 既然 $\alpha>2$ 时, $-y''-x^{\alpha}y$ 在 $[1,\infty)$ 上是极限圆的, 似乎 $q(x)$ 趋于 $-\infty$ 的速度不能再快了.

例 3.3.2 $My\equiv -y''-(x^2+x\mathrm{e}^x\cos\mathrm{e}^x)y, x\in[1,\infty)$.

取 $w=\dfrac{1}{x},q_1=0,q_2=-x^2,q_3=-x\mathrm{e}^x\cos\mathrm{e}^x$, 则条件 (1), (2) 和 (4)$'$ 都满足, 而由

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\left|\int_1^x -t\mathrm{e}^t\cos\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right| &= \frac{1}{x}\left|-t\sin\mathrm{e}^t|_1^x+\int_1^x\sin\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{x}(|-x\sin\mathrm{e}^x|+|\sin\mathrm{e}|+x-1)\leqslant 2\end{aligned}$$

知条件 (3) 也满足, 这里的 $d=1$. 所以 M 为极限点的.

这个例子说明即使 $q(x)$ 振荡得很厉害, 一再突破了 Hartman-Wintner-Titchmarsh 规定的趋于 $-\infty$ 的速度, 却仍然继续保持了微分算式的极限点性质. 从这里也可以品到一点判别准则的精细程度. 再看一个例子.

例 3.3.3 $My\equiv -y''-(x^3\sin^4 x)y, x\in[0,\infty)$.

显然, 除了 $n\pi$ 附近外, 都将有 $-x^3\sin^4 x<-x^{\frac{5}{2}}$, 因此除一串以 $n\pi$ 为中心长度可以很小的区间外, $q(x)$ 趋于 $-\infty$ 的速度都比 $-x^2$ 来得快, 但是 $q(x)$ 在这串小区间上的性质已足以决定微分算式的极限点性质了.

考虑区间 $I_n=\left[n\pi-\dfrac{1}{\sqrt{n}},n\pi+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right],n=1,2,\cdots$, 在 I_n 上定义

$$w(x)=\begin{cases}x-n\pi+\dfrac{1}{\sqrt{n}}, & n\pi-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant x\leqslant n\pi,\\ n\pi+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-x, & n\pi<x\leqslant n\pi+\dfrac{1}{\sqrt{n}},\end{cases}$$

在其余的地方让 $w(x)=0$. 显然这是一个非负的局部绝对连续函数, 取

$$q_1(x)=0,\quad q_2(x)=-x^3\sin^4 x,\quad q_3(x)=0,$$

容易看出条件 (1) 和 (3) 满足, 而在 $n\pi$ 附近,

$$\begin{aligned}(x^3\sin^4 x)w^2(x) &= (n\pi+t)^3\sin^4(n\pi+t)w^2(n\pi+t)=n^3\left(\pi+\frac{t}{n}\right)^3\sin^4 t w^2(n\pi+t)\\ &\leqslant n^3\left(\pi+\frac{1}{n^{3/2}}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4\frac{1}{n}=O(1).\end{aligned}$$

另外,

$$\int_0^\infty w(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}=\infty,$$

所以条件 (2) 与 (4)′ 满足, 故 M 是极限点的.

在例 3.3.2 里也有一串区间, 在这串区间上 $q(x)$ 趋于 $-\infty$ 的速度跟 $-x^2$ 差不多, 可见为了保证 M 是极限点的, 对于 $q(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上的整体性质并无要求, 只需要 $q(x)$ 在部分范围内有较好的性质即可. 这便引导到下面所谓的"区间型判别准则". 最早的这种判别准则见于 1951 年 P. Hartman 和 1963 年 R. S. Ismagilov 的文章, 后来 I. Knowles 和 M. S. P. Eastham 从不同的方面发展了它. 原来人们以为这是一类新型的极限点判别准则, 经 T. T. Read 的处理, 则仍然可以统一在 N. Levinson 技巧之内.

定理 3.3.6 (Eastham-Read)　设存在一串互不相交的区间 $\{I_n\}$(按顺序排列), $I_n=[a_n,b_n]$, 和一串正数 $\{v_n\}$, 使得

(1) $v_nP_n^2\geqslant K>0$, 其中, $P_n=\displaystyle\int_{a_n}^{b_n}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{p(x)}}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{v_n}=\infty$;

(3) $\displaystyle\int_{a_n}^{b_n}q_-(x)\mathrm{d}x\leqslant Cv_n^2P_n^3\min_{I_n}\sqrt{p(x)}$,

则 M 为极限点的.

证明　适当地调整 v_n 可使 $K\geqslant 1$.

(1) 定义函数 $w(x)$.

由于 $1\leqslant[v_nP_n^2]\leqslant v_nP_n^2<[v_nP_n^2]+1$, 这里 $[v_nP_n^2]$ 表示 $v_nP_n^2$ 的整数部分, 可以把 I_n 分成 $[v_nP_n^2]+1$ 个小区间, 使得在每个这样的小区间 J 上, 都有

$$\frac{1}{2v_nP_n}\leqslant\int_J p^{-\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{v_nP_n}.$$

如果有一半以上的这种小区间, 使得

$$\int_J q_-(x)\mathrm{d}x > 2Cv_nP_n\min_{I_n}\sqrt{p(x)},$$

则

$$\frac{[v_nP_n^2]+1}{2}\int_J q_-(x)\mathrm{d}x > Cv_nP_n([v_nP_n^2]+1)\min_{I_n}\sqrt{p(x)} > Cv_n^2P_n^3\min_{I_n}\sqrt{p(x)},$$

所以至少应有一半的这种小区间, 使得

$$\int_J q_-(x)\mathrm{d}x \leqslant 2Cv_nP_n\min_{I_n}\sqrt{p(x)}.$$

在每一个这种小区间 $J=[c,d]$ 上, 取 $e\in(c,d)$, 使得

$$\int_c^e p^{-\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_J p^{-\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x.$$

在这种小区间 J 上, 定义

$$w(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_c^x p^{-\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}t, & c\leqslant x\leqslant e,\\ \displaystyle w(e)-\int_e^x p^{-\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}t, & e<x\leqslant d,\end{cases}$$

在 I_n 的其余地方以及 $\bigcup\limits_n I_n$ 的补集上都定义 $w(x)$ 为零. 则 $w(x)$ 是非负的局部绝对连续函数且

$$\max_J w(x) = w(e) = \frac{1}{2}\int_J p^{-\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2v_nP_n},$$

显然 $w'(x)$ 几乎处处等于 0 或 $\pm p^{-\frac{1}{2}}(x)$, 所以 $pw'^2\leqslant 1$.

(2) 分解 $q(x)$ 如下: 在每个 I_n 的 $[v_nP_n^2]+1$ 个子区间 $J=[c,d]$ 上定义

$$q_0(x)=\frac{1}{d-c}\int_c^d q_-(x)\mathrm{d}x,$$

在 I_n 与 I_{n+1} 之间, 即 $[b_n,a_{n+1}]$ 上, 令

$$q_0(x)=\frac{1}{a_{n+1}-b_n}\int_{b_n}^{a_{n+1}} q_-(x)\mathrm{d}x,$$

则 $q_0(x)$ 是 $[a,\infty)$ 上的阶梯函数, 显然 $[a,\infty)$ 可以由一些子区间 I 组成, 使得

$$\int_I [q_-(x)-q_0(x)]\mathrm{d}x = 0.$$

取 $q_1(x)=0, q_2(x)=q_+(x)-q_0(x), q_3(x)=-q_-(x)+q_0(x)$, 则 $q(x)=q_1(x)+q_2(x)+q_3(x)$.

(3) 验证定理 3.3.5 的条件.

(i) $(1+\delta)pw'^2-q_1w^2=(1+\delta)pw'^2\leqslant 1+\delta$.

(ii) 因为在那些不满足

$$\int_J q_-(x)\mathrm{d}x\leqslant 2Cv_nP_n\min_{I_n}\sqrt{p(x)}$$

的小区间 J 以及 $\bigcup\limits_n I_n$ 的补集上, $w(x)=0$, 而在满足该不等式的小区间 J 上,

$$q_0w^2=\left(\frac{1}{d-c}\int_J q_-(x)\mathrm{d}x\right)w^2\leqslant\frac{1}{d-c}2Cv_nP_n\min_{I_n}\sqrt{p(x)}\frac{1}{4v_n^2P_n^2}.$$

由于 $\displaystyle\int_J p^{-\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{d-c}{\min\limits_{I_n}\sqrt{p(x)}}$, 故 $\displaystyle\frac{\min\limits_{I_n}\sqrt{p(x)}}{d-c}\leqslant\frac{1}{\displaystyle\int_J p^{-\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x}\leqslant 2v_nP_n$, 于是

$$q_0w^2\leqslant C,$$

所以整个讲来 $q_0w^2\leqslant C$, 这样便得

$$-q_2w^2=(q_0-q_+)w^2\leqslant C-q_+w^2\leqslant C.$$

(iii) 取 $d=1$, 注意到 $wp^{-\frac{1}{2}}\left|\displaystyle\int_a^x q_3(t)\mathrm{d}t\right|$ 只在不等式 $\displaystyle\int_J q_-(s)\mathrm{d}s\leqslant 2Cv_nP_n\min_{I_n}\cdot\sqrt{p}$ 满足的那些小区间 J 上不等于零, 而当 x 属于这种小区间 J 时,

$$\int_a^x q_3(t)\mathrm{d}t=\int_a^c q_3(t)\mathrm{d}t+\int_c^x q_3(t)\mathrm{d}t=\int_c^x q_3(t)\mathrm{d}t.$$

于是可得

$$\begin{aligned}wp^{-\frac{1}{2}}\left|\int_a^x q_3(t)\mathrm{d}t\right|&\leqslant\frac{1}{2v_nP_n\sqrt{p}}\left|\int_c^x q_3(t)\mathrm{d}t\right|\\&=\frac{1}{2v_nP_n\sqrt{p}}\left|-\int_c^x q_-(t)\mathrm{d}t+\frac{x-c}{d-c}\int_c^d q_-(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\frac{1}{v_nP_n\sqrt{p}}\int_c^d q_-(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{2Cv_nP_n\min\limits_{I_n}\sqrt{p}}{v_nP_n\sqrt{p}}\leqslant 2C.\end{aligned}$$

(iv) 由于

$$\begin{aligned}\int_J wp^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x &= \int_c^e \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\int_c^x p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x + \int_e^d \frac{w(e)}{\sqrt{p}}\mathrm{d}x - \int_e^d \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\int_e^x p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_c^e p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\int_J p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\int_e^d p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\int_J p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{4v_nP_n}\right)^2,\end{aligned}$$

故得

$$\int_a^\infty wp^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \geqslant \sum_n \int_{I_n} wp^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \geqslant \sum_n \frac{[v_nP_n^2]+1}{2}\left(\frac{1}{4v_nP_n}\right)^2 \geqslant \frac{1}{32}\sum_n \frac{1}{v_n} = \infty.$$

这样条件 (i)~(iv) 均满足, 所以 M 是极限点的, 证毕.

推论 3.3.5 (Hartman) 如果在一串有固定长度的区间 $\{I_n\}$ 上, $q_-(x)$ 有一致的下界, 则 $-D^2+q$ 是极限点的.

证明 取 $v_n=1$ 用 Eastham-Read 定理即得.

例 3.3.4 在 $[1,\infty)$ 上考虑微分算式 $-y''-x^\alpha\sin x^\beta y$. 取 $I_n=[((2n-1)\pi)^{\frac{1}{\beta}},(2n\pi)^{\frac{1}{\beta}}](n=1,2,\cdots)$, 显然在 I_n 上 $q(x)\geqslant 0$, 所以 $q_-(x)=0$, 而

$$P_n=(2n\pi)^{\frac{1}{\beta}}-((2n-1)\pi)^{\frac{1}{\beta}}=(2n\pi)^{\frac{1}{\beta}}\left[1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]=O(n^{-1+\frac{1}{\beta}}),$$

取 $v_n=n^{-2(-1+\frac{1}{\beta})}$, 则当 $0<\beta\leqslant 2$ 时, $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{v_n}=\infty$, 所以对任何 α, 只要 $0<\beta\leqslant 2$, 微分算式都是极限点的.

定理 3.3.7 (Read) 设

(1) 存在一串互不相交的区间 $\{J_n\}$ 使得 $q(x)$ 在每个 J_n 上非负;

(2) 存在常数 $\gamma>0$ 和 $0<c<1$ 以及 J_n 的子区间 $I_n(n=1,2,\cdots)$, 使得在 $J_n\setminus I_n$ 的连通分支 J 上满足 $\int_J p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\geqslant\gamma\int_{J_n}p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 且有

$$\sum_{n=1}^\infty\left\{\exp\left[c\int_{I_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right]-1\right\}\left(\int_{J_n}p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^2=\infty,$$

则 M 为极限点的.

证明 (1) 定义函数 $w(x)$.

设 $J_n=[a_n,b_n]$, 假定 $I_n=[c_1,c_3]$, 记 $c_0=a_n, c_4=b_n$, 可适当把 I_n 扩大一点, 使得

$$\int_{c_0}^{c_1} p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\int_{c_3}^{c_4} p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\gamma\int_{J_n} p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x,$$

再取 $c_2\in(c_1,c_3)$, 使得

$$\int_{c_1}^{c_2}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\int_{c_2}^{c_3}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

首先在 $\bigcup_n J_n$ 外, 取 $w(x)=0$, 而在 J_n 上定义 $w(x)$ 如下:

$$w(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{c_0}^{x} p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t, & c_0\leqslant x\leqslant c_1,\\ \displaystyle w(c_1)\exp\left[c\int_{c_1}^{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right], & c_1\leqslant x\leqslant c_2,\\ \displaystyle w(c_1)\exp\left[c\int_{x}^{c_3}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right], & c_2\leqslant x\leqslant c_3,\\ \displaystyle\int_{x}^{c_4} p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t, & c_3\leqslant x\leqslant c_4,\end{cases}$$

所以当 $c_0<x<c_1$ 与 $c_3<x<c_4$ 时, 有

$$pw'^2=1,$$

而当 $c_1<x<c_2$ 与 $c_2<x<c_3$ 时, 则有

$$w'=\pm c\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}w,\quad c^{-2}pw'^2-qw^2=0.$$

(2) 分解 $q(x)$ 如下: 在 $\bigcup_n J_n$ 外, 取 $q_1(x)=0, q_2(x)=q(x), q_3(x)=0$; 在 $\bigcup_n J_n$ 上, 取 $q_1(x)=q(x), q_2(x)=0, q_3(x)=0$.

(3) 下面验证定理 3.3.4 的条件.

显然 $q_1(x)\geqslant 0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{c^2}-1>0, K\geqslant\dfrac{1}{c^2}$, 则得

$$(1+\delta)pw'^2-q_1w^2\leqslant K,$$

条件 (1) 成立. 根据 w,q_1,q_2,q_3 的定义, (2) 与 (3) 是自然满足的. 最后, 因为

$$\int_{J_n} w^2\left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\int_{J_n} w^2\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\geqslant\int_{c_1}^{c_2} w^2\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{c_1}^{c_2} w^2(c_1) \exp\left[2c\int_{c_1}^{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\left(\int_{c_1}^{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{w^2(c_1)}{2c}\exp\left[2c\int_{c_1}^{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right]\Bigg|_{c_1}^{c_2}\\
&= \frac{w^2(c_1)}{2c}\left\{\exp\left[2c\int_{c_1}^{c_2}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right]-1\right\}\\
&= \frac{\gamma^2}{2c}\left\{\exp\left[c\int_{I_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right]-1\right\}\left(\int_{J_n}p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^2,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\int_a^{\infty} w^2\left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\gamma^2}{2c}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\exp\left[c\int_{I_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right]-1\right\}\left(\int_{J_n}p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^2=\infty,
$$

条件 (4) 也满足, 故 M 为极限点的, 证毕.

推论 3.3.6 (Ismagilov-Knowles) 设

(1) 存在一串互不相交的区间 $\{J_n\}$, 使得在每个 J_n 上,

$$
p(x) > p_n > 0, \quad q(x) \geqslant q_n > 0;
$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{\frac{3}{2}} q_n^{\frac{1}{2}}\left(\int_{J_n}\frac{\mathrm{d}x}{p}\right)^3=\infty,$

则 M 为极限点的.

证明 对于 $\gamma=\dfrac{1}{4}$ 与 $0<c<1$, 取 J_n 的子区间 I_n, 使得 $J_n \setminus I_n$ 的两个连通分支上 p^{-1} 的积分都等于 $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{J_n}p^{-1}\mathrm{d}x$. 于是

$$
\exp\left[c\int_{I_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right]-1 \geqslant c\int_{I_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \geqslant cp_n^{\frac{1}{2}}q_n^{\frac{1}{2}}\int_{I_n}p^{-1}\mathrm{d}x = \frac{c}{2}p_n^{\frac{1}{2}}q_n^{\frac{1}{2}}\int_{J_n}p^{-1}\mathrm{d}x,
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\exp\left[c\int_{I_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right]-1\right\}\left(\int_{J_n}p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^2\\
\geqslant &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{2}p_n^{\frac{1}{2}}q_n^{\frac{1}{2}}\int_{J_n}p^{-1}\mathrm{d}x\left(\int_{J_n}p^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \frac{c}{2}\sum_{n=1}^{\infty}p_n^{\frac{3}{2}}q_n^{\frac{1}{2}}\left(\int_{J_n}\frac{\mathrm{d}x}{p}\right)^3=\infty,
\end{aligned}
$$

因此 M 为极限点的.

例 3.3.5 在 $[0,\infty)$ 上考虑 $My=-y''+x^{\alpha}\sin(\pi x^{\beta})y, \alpha,\beta>0$, 显然对应的

$q(x)$ 在某些区间上趋于 $-\infty$, 取 $J_n=[(2n)^{\frac{1}{\beta}},(2n+1)^{\frac{1}{\beta}}]$, $I_n=\left[\left(2n+\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}},\left(2n+\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]$, 当 $x\in I_n$ 时, $\sin\pi x^\beta\geqslant\frac{1}{2}$, 所以

$$q(x)\geqslant q_n=\frac{\left(2n+\frac{1}{6}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{2},$$

而

$$\int_{I_n}\frac{\mathrm{d}x}{p}=\left(2n+\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}}-\left(2n+\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}}=\left(2n+\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}}\left[1-\left(1-\frac{\frac{4}{6}}{2n+\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]=O\left(n^{\frac{1-\beta}{\beta}}\right).$$

于是根据推论 3.3.6, 当

$$\frac{\alpha}{2\beta}+\frac{3(1-\beta)}{\beta}\geqslant-1,\text{ 即 }\alpha\geqslant4\beta-6\text{ 时,}$$

M 为极限点的. 但是由

$$\begin{aligned}\int_{I_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x&=\int_{I_n}x^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\pi x^\beta}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{I_n}x^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\left[\left(2n+\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}-\left(2n+\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\left(2n+\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\left[1-\left(1-\frac{\frac{4}{6}}{2n+\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\right]\\&=O(n^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)-1}),\end{aligned}$$

根据定理 3.3.7, 因为有指数函数出现, 只要 $\frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)-1>0$ 即 $\alpha>2\beta-2$ 时, 便可得 M 为极限点的. 这个结果当然比前一个要好. 这主要是因为当 J_n 和 I_n 取得适当使 $\int_{I_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 无界时, $\exp\left[c\int_{I_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right]$ 可以很快地趋于 ∞.

以下讨论极限圆的判别. 设 $a=0$, 算子的极限圆性质与极限点性质不同, 它对系数有更强的要求, 这一点可以从下述两个定理看出.

定理 3.3.8 (Eastham-Thompson)　对任何 $[0,\infty)$ 上的连续函数 $Q(x)$, 都存在一个局部 Lebesgue 可积的函数 $q(x)$ 使得 $q(x)<Q(x)$, 而 $M=-D^2+q$ 是极限点的.

证明 首先给一个构造极限点微分算式的方法, 对一串正整数 $\{N_n\}$ 取两个正数序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 使得

$$a_n b_n = \pi N_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty.$$

考虑 $[0, \infty)$ 上一串分点

$$s_0 = 0, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

在每个区间 $[s_{n-1}, s_n)(n = 1, 2, \cdots)$ 上定义

$$q(x) = -a_n^2,$$

于是得到一个阶梯函数, 它自然是局部 Lebesgue 可积的, 显然可以看出

$$Y(x) = (-1)^{M_{n-1}} \cos a_n(x - s_{n-1}), \quad s_{n-1} \leqslant x < s_n, n = 1, 2, \cdots$$

是方程 $-y'' + q(x)y = 0$ 的解, 其中, $M_0 = 0, M_n = \sum_{k=1}^{n} N_k (n = 1, 2, \cdots)$. 因为

$$\begin{aligned} Y(s_n - 0) &= (-1)^{M_{n-1}} \cos a_n(s_n - s_{n-1}) = (-1)^{M_{n-1}} \cos \pi N_n \\ &= (-1)^{M_{n-1}+N_n} = (-1)^{M_n}, \\ Y(s_n + 0) &= (-1)^{M_n} \cos a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) = (-1)^{M_n}, \end{aligned}$$

所以 $Y(x)$ 在整个区间 $[0, \infty)$ 上连续. 此外, 由

$$\begin{aligned} &Y'(x) = (-1)^{M_{n-1}+1} a_n \sin(x - s_{n-1}), \quad s_{n-1} \leqslant x < s_n, n = 1, 2, \cdots, \\ &Y'(s_n - 0) = 0 = Y'(s_n + 0), \end{aligned}$$

可知 $Y'(x)$ 也在整个区间上连续. 但由于

$$\int_0^{\infty} Y^2(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s_{n-1}}^{s_n} \cos^2 a_n(x - s_{n-1}) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty,$$

故微分算式 M 为极限点的.

现在对区间 $[0, \infty)$ 上的连续函数 $Q(x)$, 取正实数序列 $\{b_n\}$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, 作分点 $s_0 = 0, s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k (n = 1, 2, \cdots)$, 令

$$Q_n = \min_{s_{n-1} \leqslant x \leqslant s_n} Q(x),$$

选取正整数序列 $\{N_n\}$, 使得

$$\frac{\pi^2 N_n^2}{b_n^2} > -Q_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

再取正实数序列 $\{a_n\}$, 使得

$$a_n b_n = \pi N_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

按前面讲的方法构造函数 $q(x)$, 则

$$q(x) = -a_n^2 = -\frac{\pi^2 N_n^2}{b_n^2} < Q_n \leqslant Q(x), \quad s_{n-1} \leqslant x < s_n, n = 1, 2, \cdots,$$

这个 $q(x)$ 便满足定理的要求. 证毕.

注　如果选取的 $\{N_n\}$, $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 还使得 $\{a_n\}$ 有正的下界, 那么方程 $-y'' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关解

$$Y(x) = (-1)^{M_{n-1}} \cos a_n(x - s_{n-1}), \quad s_{n-1} \leqslant x < s_n, n = 1, 2, \cdots,$$

$$Z(x) = (-1)^{M_{n-1}} \frac{1}{a_n} \sin a_n(x - s_{n-1}), \quad s_{n-1} \leqslant x < s_n, n = 1, 2, \cdots$$

都是有界的, 所以它的一切解均有界. W. T. Patula 与 J. S. W. Wong 在 1972 年的文章 *An L^p-analogue of the Weyl alternative*, Math. Ann. 197, 9~28 中曾证明如果微分算式 $-y'' + q(x)y$ 的一切解均有界, 则 $q(x)$ 的一切 L^p 摄动 $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ 都不改变它的极限点或极限圆性质. 根据这个结论, 便可以在定理 3.3.8 得到的 $q(x)$ 上加上某些小的摄动项, 使得新的 $q(x)$ 不仅满足定理的要求, 而且还是无穷可微的.

定理 3.3.9 (Eastham-Thompson)　任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[0, \infty)$ 上无穷可微的 q_1 和 q_2, 使得除了 x 属于一个总长度不大于 ε 的区间组外都有 $q_1(x) = q_2(x)$, 且微分算式 $M_1 \equiv -D^2 + q_1$ 为极限点的, 而 $M_2 \equiv -D^2 + q_2$ 为极限圆的.

证明　取 $N_n = 2, a_n = n, b_n = \dfrac{2\pi}{n} (n = 1, 2, \cdots)$, 则按定理 3.3.8 的注可以取到无穷次可微单调下降 (因为 a_n 是递增的) 的 $q_1(x)$, 使得 $M_1 y \equiv -y'' + q_1(x)y$ 为极限点的. 这里 $q_1(x)$ 是由定理 3.3.8 里的阶梯函数 $q(x)$ 在 s_n 的 $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ 邻域内经过光滑化后得到的.

为了得到微分算式 M_2, 令

$$q_2(x) = q_1(x) + |q_1(x)|^{\frac{1}{4}} (|q_1(x)|^{-\frac{1}{4}})'',$$

显然除了总长度为 ε 的区间组 $\left\{ \left(s_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, s_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) | n = 1, 2, \cdots \right\}$ 外, 其余地方 $q_1(x)$ 都与 $q_2(x)$ 相等. 下面来证明 $M_2 y \equiv -y'' + q_2(x)y$ 是极限圆的.

取

$$f(x)=\begin{cases}|q_1(x)|^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{x_0}^{x}|q_1(t)|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t}, & x\in[x_0,\infty),\\ \text{二次连续可微函数}, & x\in[0,x_0],\end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}\int_0^\infty|q_1(x)|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x&=\int_0^{s_1}|q_1(x)|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{s_n}^{s_{n+1}}|q_1(x)|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{s_1}|q_1(x)|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{(n+1)^2}<\infty,\end{aligned}$$

所以 $f\in L^2[0,\infty)$. 此外在 $[x_0,\infty)$ 上,

$$\begin{aligned}M_2f(x)&=-f''(x)+q_2(x)f(x)\\&=-[(-q_1(x)^{-\frac{1}{4}})''+\mathrm{i}((-q_1(x))^{\frac{1}{4}})'+\mathrm{i}((-q_1(x))^{\frac{1}{4}})'(-q_1(x))^{\frac{1}{2}}\\&\quad-(-q_1(x))^{\frac{3}{4}}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{x_0}^{x}(-q_1(t))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t}+[q_1(x)(-q_1(x))^{-\frac{1}{4}}\\&\quad+((-q_1(x))^{-\frac{1}{4}})'']\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{x_0}^{x}(-q_1(t))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t}\\&=-\mathrm{i}[((-q_1(x))^{\frac{1}{4}})'+((-q_1(x))^{-\frac{1}{4}})'(-q_1(x))^{\frac{1}{2}}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{x_0}^{x}(-q_1(t))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t}=0.\end{aligned}$$

因此 $M_2f\in L^2[0,\infty)$, 这表示 f 属于最大算子 $T_1(M_2)$ 的定义域 $\mathscr{D}(T_1(M_2))$, 而当 $x\to\infty$ 时, Lagrange 双线性型

$$\begin{aligned}[f,f](x)&=f(x)\overline{f'(x)}-f'(x)\overline{f(x)}\\&=(-q_1(x))^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{x_0}^{x}(-q_1(t))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t}\overline{[((-q_1(x))^{-\frac{1}{4}})'+\mathrm{i}(-q_1(x))^{\frac{1}{4}}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{x_0}^{x}(-q_1(t))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t}}\\&\quad-[((-q_1(x))^{-\frac{1}{4}})'+\mathrm{i}(-q_1(x))^{\frac{1}{4}}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{x_0}^{x}(-q_1(t))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t}\overline{(-q_1(x))^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{x_0}^{x}(-q_1(t))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t}}\\&=-2\mathrm{i}\end{aligned}$$

并不趋于零, 所以由定理 1.2.5, M_2 是极限圆的. 证毕.

这条定理说明微分算式的极限圆性质并不像极限点性质那样可以由一串区间上系数的性质决定, 它是由系数在整个区间上的性质决定的. 这一现象并不是二阶情形所特有的, T. T. Read 对一般 $2n$ 阶对称微分算式的极限圆情形也得到了类似的定理.

下面将用渐近方法考虑微分算式的解在无穷远处的渐近性态来得到某些极限圆情形的充分判别原则.

定理 3.3.10 (Read)　设存在正函数 $f(x), f'(x)$ 局部绝对连续且

$$h=f\left(Mf+\frac{1}{pf^3}\right)\in L[0,\infty),$$

则方程

$$My = 0$$

的解有下述渐近估计:

$$y = f\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}F}(1+o(1)), \quad y' = \left(f \mp \frac{\mathrm{i}}{pf}\right)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}F}(1+o(1)),$$

其中, $F' = -\dfrac{1}{pf^2}$.

证明 设 y 是方程的解, 令

$$w_1 = \frac{y}{f}, \quad w_2 = -pfy' + pf'y,$$

则 w_1 与 w_2 满足方程组

$$w_1' = -\frac{1}{pf^2}w_2, \quad w_2' = \left(\frac{1}{pf^2} - h\right)w_1.$$

把它写成矩阵形式, 即

$$\boldsymbol{W}' = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{W},$$

其中,

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{pf^2} \\ \dfrac{1}{pf^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -h & 0 \end{pmatrix}.$$

而 $\boldsymbol{E} \in L[0,\infty)$, 先解 $\boldsymbol{W}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{W}$, 然后用常数变易法去估计解.

设 $\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\varphi}' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}\varphi$, 其中, $\alpha = -\dfrac{1}{pf^2}$, 则

$$\varphi_1' = \alpha\varphi_2, \quad \varphi_2' = -\alpha\varphi_1.$$

于是

$$\frac{\varphi_1'}{\varphi_2} = -\frac{\varphi_2'}{\varphi_1}, \quad \varphi_1\varphi_1' = -\varphi_2\varphi_2',$$

积分得

$$\varphi_1^2 = -\varphi_2^2, \quad \varphi_1 = \pm \mathrm{i}\varphi_2.$$

故

$$\varphi_1' = \pm \mathrm{i}\alpha\varphi_1, \quad \varphi_1 = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\int \alpha \mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}F}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\alpha}\varphi_1' = \pm \mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}F}.$$

这样便得到 $W' = AW$ 的一个基本解组

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}F} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}F} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}F} & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}F} \end{pmatrix}.$$

显然

$$\det\boldsymbol{\Phi} = -2\mathrm{i} \neq 0, \quad \boldsymbol{\Phi}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}F} & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}F} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}F} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}F} \end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}$, 其中, $\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}' = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi},$$

即

$$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}' = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}, \quad \boldsymbol{\Psi}' = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}.$$

因为 $\boldsymbol{E} \in L[0,\infty)$ 所以 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Phi} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}h & \mathrm{i}h\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}F} \\ -\mathrm{i}h\mathrm{e}^{2\mathrm{i}F} & -\mathrm{i}h \end{pmatrix} \in L[0,\infty)$. 把它们看成是空间 $\mathbf{R}^2$ 中的向量, 作内积

$$(\boldsymbol{\Psi}', \boldsymbol{\Psi}) = (\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Psi}), \quad (\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Psi}') = (\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}),$$

所以

$$\left(\frac{\|\boldsymbol{\Psi}\|^2}{2}\right)' \leqslant \|\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}\|\|\boldsymbol{\Psi}\| \leqslant \|\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Phi}\|\|\boldsymbol{\Psi}\|^2.$$

因为有限维 Banach 空间上的模都等价, 故

$$|\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Phi}\| \leqslant K|h|, \quad (\|\boldsymbol{\Psi}(x)\|^2)' \leqslant 2K|h(x)|\|\boldsymbol{\Psi}(x)\|^2,$$

于是

$$\|\boldsymbol{\Psi}(x)\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{\Psi}(0)\|^2\mathrm{e}^{2K\int_0^\infty |h(x)|\mathrm{d}x},$$

这表示 Ψ_1, Ψ_2 在 $[0,\infty)$ 上有界. 由于齐次方程的解可以不考虑常数因子, 故得

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{1} + o(1).$$

这样便得到了 $\boldsymbol{W}$ 的基本解组的渐近估计

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}F}(1+o(1)) \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}F}(1+o(1)) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}F}(1+o(1)) \\ -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}F}(1+o(1)) \end{pmatrix}$$

由此可得 y 与 y' 的渐近估计

$$y = fw_1 = f\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}F}(1+o(1)),$$

$$y' = \frac{1}{pf}(pf'y - w_2) = \frac{f'}{f}y - \frac{w_2}{pf} = \left(f' \mp \frac{\mathrm{i}}{pf}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}F}\right)(1+o(1)).$$

定理证毕.

推论 3.3.7 (Knowles)　设存在正函数 $f(x), f'(x)$ 局部绝对连续且

$$f\left(Mf + \frac{1}{pf^3}\right) \in L[0,\infty),$$

则 M 为极限圆情形的充分必要条件是 $f \in L^2[0,\infty)$.

如果 u 和 v 是方程 $My = 0$ 满足 $p(u'v - uv') = 1$ 的两个解, 令 $r^2 = u^2 + v^2$, 则 M 为极限圆的充分必要条件是 $r \in L^2[0,\infty)$. 但是由 $r' = \dfrac{u'u + v'v}{r}$ 可得

$$\begin{aligned}
Mr + \frac{1}{pr^3} &= -(pr')' + qr + \frac{1}{pr^3} = -\left(\frac{pu'u + pv'v}{r}\right)' + qr + \frac{1}{pr^3} \\
&= -\frac{(pu')'u + (pv')'v + pu'^2 + pv'^2}{r} + \frac{p(u'u + v'v)^2}{r^3} + qr + \frac{1}{pr^3} \\
&= -\frac{q}{r}(u^2+v^2) + \frac{p(u'u+v'v)^2 - (pu'^2 + pv'^2)(u^2+v^2)}{r^3} + qr + \frac{1}{pr^3} \\
&= -\frac{p(u'v - uv')^2}{r^3} + \frac{1}{pr^3} = 0,
\end{aligned}$$

所以推论 3.3.7 里的 f 可以看成是 r 的一个近似.

例 3.3.6　在 $[1,\infty)$ 上考虑微分算式 $My = -(x^\alpha y')' - x^\beta y$, 取 $f(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{\alpha+\beta}{4}}}$, 则

$$f\left(Mf + \frac{1}{pf^3}\right) = \frac{\alpha+\beta}{4}\left(\frac{3\alpha - \beta}{4} - 1\right)x^{\frac{\alpha-\beta}{2}-2},$$

当 $\alpha - \beta < 2$ 时, $f\left(Mf + \dfrac{1}{pf^3}\right) \in L[1,\infty)$. 由推论 3.3.7, 对于满足 $\alpha - \beta < 2$ 的 α 和 β, M 是极限圆的充分必要条件是 $\alpha + \beta > 2$.

特别地, 当 $\alpha = 0$ 时, 已经知道 M 在 $\beta \leqslant 2$ 时是极限点的, 现在则得到 $\beta > 2$ 时它是极限圆的.

下面推广定理 3.3.10 使它在势函数部分能允许有一个小的摄动项. 考虑 $q = r + s$, 其中, r 是一个比较好的函数, 而摄动项 s 则可以振荡得很频繁, 但从某种意义来说是某个 “小” 函数的导数, 这样能证明方程

$$My = -(py')' + (r+s)y = 0$$

的解主要的将由 r 来确定.

定理 3.3.11 (Read) 设存在正函数 $f(x)$ 和函数 $u(x),v(x)$, 使得 $f'(x),u(x)$, $v(x)$ 都是局部绝对连续的, 且满足

(1) $f\left[-(pf')'+rf+\dfrac{1}{pf^3}\right]\in L[0,\infty)$;

(2) u 有界并使得下列 3 个函数都在 $[0,\infty)$ 上 Lebesgue 可积:

(i) $\dfrac{u^2}{pf^2}$;

(ii) $u'+\dfrac{2v}{pf^2}$;

(iii) $v'-\dfrac{2u}{pf^2}+\dfrac{sf^2}{2}-\dfrac{2v^2}{pf^2}$,

则方程的解有渐近估计

$$\begin{aligned}y&=f\mathrm{e}^{u\pm \mathrm{i}F}(1+o(1)),\\ y'&=\left[f'-\frac{1}{pf}\left(2v\pm\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2u}}\right)\right]\mathrm{e}^{u\pm\mathrm{i}F}(1+o(1)),\end{aligned}$$

其中, $F'=-\dfrac{1}{pf^2\mathrm{e}^{2u}}$.

证明 设 y 是方程的解, 令

$$w_1=\frac{y}{fe^u},\quad w_2=\left(pf'-\frac{2v}{f}\right)\mathrm{e}^u y-pf\mathrm{e}^u y',$$

则由

$$y=f\mathrm{e}^u w_1,\quad y'=f'\mathrm{e}^u w_1-\frac{2v\mathrm{e}^u}{pf}w_1-\frac{w_2}{pf\mathrm{e}^u}$$

可得 w_1,w_2 的微分方程组

$$\begin{aligned}w_1'&=\left(-u'-\frac{2v}{pf^2}\right)w_1-\frac{1}{pf^2\mathrm{e}^{2u}}w_2,\\ w_2'&=-\mathrm{e}^{2u}\left(-f(pf')'+rf^2+2v'+sf^2-\frac{4v^2}{pf^2}\right)w_1+\left(u'+\frac{2v}{pf^2}\right)w_2.\end{aligned}$$

记

$$G=f\left[-(pf')'+rf+\frac{1}{pf^3}\right],\quad H=v'-\frac{2u}{pf^2}+\frac{sf^2}{2}-\frac{2v^2}{pf^2},$$

则由于 u 有界, 可得

$$\begin{aligned}-\mathrm{e}^{2u}\left(-f(pf')'+rf^2+2v'+sf^2-\frac{4v^2}{pf^2}\right)&=-\mathrm{e}^{2u}\left(G-\frac{1}{pf^2}+2H+\frac{4u}{pf^2}\right)\\ &=-\mathrm{e}^{2u}\left[G+2H-\frac{1}{pf^2}(1-4u)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{e}^{2u}\left[G+2H-\frac{1}{pf^2}\mathrm{e}^{-4u}-\frac{1}{pf^2}(1-4u-\mathrm{e}^{-4u})\right]\\
&= -\mathrm{e}^{2u}\left[G+2H-\frac{1}{pf^2\mathrm{e}^{4u}}+\frac{1}{pf^2}O(u^2)\right].
\end{aligned}
$$

令

$$
\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{pf^2e^{2u}} \\ \dfrac{1}{pf^2e^{2u}} & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -u'-\dfrac{2v}{pf^2} & 0 \\ -\mathrm{e}^{2u}\left[G+2H+\dfrac{1}{pf^2}O(u^2)\right] & u'+\dfrac{2v}{pf^2} \end{pmatrix},
$$

则方程组可写成矩阵形式

$$
\boldsymbol{W}'=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{W}.
$$

由条件可知 $\boldsymbol{E}\in L[0,\infty)$, 所以用定理 3.3.10 里的证明方法可得 $\boldsymbol{W}$ 的两个基本解组是

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}F}(1+o(1)) \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}F}(1+o(1)) \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}F}(1+o(1)) \\ -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}F}(1+o(1)) \end{pmatrix},
$$

即

$$
w_1=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}F}(1+o(1)),\quad w_2=\pm\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}F}(1+o(1)),
$$

这里 $F'=-\dfrac{1}{pf^2e^{2u}}$. 由此可得

$$
\begin{aligned}
y&= f\mathrm{e}^{u\pm\mathrm{i}F}(1+o(1)),\\
y'&=\frac{1}{pf\mathrm{e}^u}\left[\left(pf'-\frac{2v}{f}\right)f\mathrm{e}^{2u\pm\mathrm{i}F}(1+o(1))\mp\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}F}(1+o(1))\right]\\
&=\left[f'-\frac{1}{pf}\left(2v\pm\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2u}}\right)\right]\mathrm{e}^{u\pm\mathrm{i}F}(1+o(1)).
\end{aligned}
$$

定理证毕.

通常在应用定理 3.3.11 时, 若 $r<0$, 便取 $f=(-pr)^{-\frac{1}{4}}$. 于是 $rf+\dfrac{1}{pf^3}=0$, 这样第 1 个条件变成 $f(pf')'\in L[0,\infty)$. 然后再取 u,v, 使得

$$
u'+\frac{2v}{pf^2}=0,\quad v'-\frac{2u}{pf^2}+\frac{sf^2}{2}=0.
$$

推论 3.3.8　设 $S'=s, S\in L[0,\infty)\cap L^2[0,\infty)$, 则方程

$$
y''+(1+s)y=0
$$

的解有渐近估计

$$y = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x}(1+o(1)), \quad y' = (-S \pm \mathrm{i})\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x}(1+o(1)).$$

证明 取 $f=1, u=0, v=-\dfrac{S}{2}$, 则在定理 3.3.11 中,

$$f\left[-(pf')' + rf + \frac{1}{pf^3}\right] = 0, \quad p=-1, r=-1.$$

$$u' + \frac{2v}{pf^2} = S \in L[0,\infty),$$

$$v' - \frac{2u}{pf^2} + \frac{sf^2}{2} - \frac{2v^2}{pf^2} = -\frac{s}{2} + \frac{s}{2} + \frac{S^2}{2} = \frac{S^2}{2} \in L[0,\infty)$$

条件均满足. 此时,

$$F' = -\frac{1}{pf^2}\mathrm{e}^{2u} = 1,$$

故 $F=x$, 于是得

$$y = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x}(1+o(1)),$$

$$y' = (-S \pm \mathrm{i})\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x}(1+o(1)).$$

证毕.

从这里可以看出, 当 s 是一个“小”函数 S 的导数时, 方程的解就与 $y''+y=0$ 的解差不多, 这时微分算式 $y''+(1+s)y$ 属于极限点情形.

例 3.3.7 在 $[1,\infty)$ 上考虑微分算式 $My \equiv y'' + (1+Kx^\alpha \sin x^\beta)y$. 由于

$$S = \int Kx^\alpha \sin x^\beta \mathrm{d}x = -\frac{K}{\beta}x^{\alpha-\beta+1}\cos x^\beta + \frac{K(\alpha-\beta+1)}{\beta}\int x^{\alpha-\beta}\cos x^\beta \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{K}{\beta}x^{\alpha-\beta+1}\cos x^\beta + \frac{K(\alpha-\beta+1)}{\beta^2}x^{\alpha-2\beta+1}\sin x^\beta - \cdots,$$

所以当 $0<\alpha<\beta-2$ 时, $S = O(x^{\alpha-\beta+1}) \in L[1,\infty)\cap L^2[1,\infty)$, M 为极限点型的.

推论 3.3.9 (J. S. W. Wong) 如果微分算式 $M=-DpD+q$ 的系数满足

(1) q' 局部绝对连续, q'' 局部 Lebesgue 可积;

(2) $q<0$;

(3) $(-pq)^{-\frac{1}{4}} \in L^2[0,\infty)$;

(4) $\{p[(-pq)^{-\frac{1}{4}}]'\}' \in L^2[0,\infty)$,

则 M 为极限圆的.

证明 取 $f=(-pq)^{-\frac{1}{4}}, u=0, v=0$, 则定理 3.3.11 的条件均满足, 所以方程 $My=0$ 的解有渐近估计

$$y = (-pq)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}F}(1+o(1)).$$

注意到条件 (3) 便知一切解都平方可积, 故微分算式 M 为极限圆型的.

推论 3.3.10 (Everitt)　如果微分算式 $M=-DpD+q$ 的系数满足推论 3.3.9 的前 3 个条件, 且

(4)′ $[p(pq)'(-pq)^{-\frac{5}{4}}]'\in L^2[0,\infty)$,

则 M 为极限圆型的.

证明　因为

$$[p(pq)'(-pq)^{-\frac{5}{4}}]'=4\{p[(-pq)^{-\frac{1}{4}}]'\}',$$

所以 Everiitt 的结果与 Wong 的结果是等价的.

类似地, 也可以从 Read 定理推出更早些时候 Dunford-Schwartz 的一条极限圆判别准则.

推论 3.3.11 (Dunford-Schwartz)　如果 $M=-DpD+q$ 的系数满足 Wong 推论的前 3 个条件, 且

(4)″ $\left[\dfrac{(-pq)'}{p^{\frac{1}{2}}(-q)^{\frac{3}{2}}}\right]'+\dfrac{1}{4}\dfrac{[(-pq)']^2}{p^{\frac{3}{2}}(-q)^{\frac{5}{2}}}\in L[0,\infty)$,

则 M 为极限圆型.

证明　因为

$$\begin{aligned}-4\{p[(-pq)^{-\frac{1}{4}}]'\}'&=[p(-pq)'(-pq)^{-\frac{5}{4}}]'\\&=\frac{[p(-pq)']'}{(-pq)^{\frac{5}{4}}}-\frac{5}{4}\frac{p[(-pq)']^2}{(-pq)^{\frac{9}{4}}},\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\left[\frac{(-pq)'}{p^{\frac{1}{2}}(-q)^{\frac{3}{2}}}\right]'+\frac{1}{4}\frac{[(-pq)']^2}{p^{\frac{3}{2}}(-q)^{\frac{5}{2}}}&=\left[\frac{p(-pq)'}{(-pq)^{\frac{3}{2}}}\right]'+\frac{1}{4}\frac{[(-pq)']^2}{p^{\frac{3}{2}}(-q)^{\frac{5}{2}}}\\&=\frac{[p(-pq)']'}{(-pq)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{2}\frac{p[(-pq)']^2}{(-pq)^{\frac{5}{2}}}+\frac{1}{4}\frac{[(-pq)']^2}{p^{\frac{3}{2}}(-q)^{\frac{5}{2}}}\\&=\frac{[p(-pq)']'}{(-pq)^{\frac{3}{2}}}-\frac{5}{4}\frac{p[(-pq)']^2}{(-pq)^{\frac{5}{2}}},\end{aligned}$$

故可得

$$-4(-pq)^{-\frac{1}{4}}\{p[(-pq)^{-\frac{1}{4}}]'\}'=\left[\frac{(-pq)'}{p^{\frac{1}{2}}(-q)^{\frac{3}{2}}}\right]'+\frac{1}{4}\frac{[(-pq)']^2}{p^{\frac{3}{2}}(-q)^{\frac{5}{2}}},$$

因此取 $f=(-pq)^{-\frac{1}{4}},u=0,v=0$, 用定理 3.3.11 即得.

最后再考虑一个例子.

例 3.3.8　在 $[1,\infty)$ 上考虑微分算式 $My\equiv y''+(x^\alpha+Kx^\beta\sin x^\gamma)y$, 由例 3.3.6 知当 $\alpha>2,K=0$ 时, M 为极限圆的. 现设 $\alpha>2$, 而 $K\neq0$, 即增加了一个摄动项的情形.

应用定理 3.3.11, 这时 $r=-x^{\alpha}<0$, 所以取 $f(x)=x^{-\frac{\alpha}{4}}$. 于是 $f\in L^2[1,\infty)$ 且

$$ff''=\left(-\frac{\alpha}{4}\right)\left(-\frac{\alpha}{4}-1\right)x^{-\frac{\alpha}{2}-2}\in L[1,\infty),$$

定理 3.3.11 的条件 (1) 满足. 记 $\delta=\dfrac{\alpha}{2},C=\dfrac{K}{2}$, 取 u,v 满足微分方程组

$$\begin{aligned}u'&=2x^{\delta}v,\\ v'&=-2x^{\delta}u-Cx^{\beta-\delta}\sin x^{\gamma},\end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0 & 2x^{\delta}\\ -2x^{\delta} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -Cx^{\beta-\delta}\sin x^{\gamma}\end{pmatrix}.$$

齐次方程的基本解组是

$$\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}F} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}F}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}F} & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}F}\end{pmatrix},$$

其中, $F'=2x^{\delta},F=\dfrac{2}{\delta+1}x^{\delta+1}$. 用常数变易法求 u,v, 设

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}F} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}F}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}F} & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}F}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix},$$

代入方程组得

$$\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}F} & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}F}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}F} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}F}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -Cx^{\beta-\delta}\sin x^{\gamma}\end{pmatrix},$$

即

$$c_1=\frac{\mathrm{i}C}{2}\int x^{\beta-\delta}\sin x^{\gamma}\left(\cos\frac{2}{\delta+1}x^{\delta+1}-\mathrm{i}\sin\frac{2}{\delta+1}x^{\delta+1}\right)\mathrm{d}x,$$

$$c_2=-\frac{\mathrm{i}C}{2}\int x^{\beta-\delta}\sin x^{\gamma}\left(\cos\frac{2}{\delta+1}x^{\delta+1}+\mathrm{i}\sin\frac{2}{\delta+1}x^{\delta+1}\right)\mathrm{d}x.$$

因为当 $\gamma\geqslant 1+\delta$ 时,

$$\int x^{\beta-\delta}\sin x^{\gamma}\sin x^{\delta+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\gamma}x^{\beta-\delta-\gamma+1}\sin x^{\delta+1}\cos x^{\gamma}+\cdots=O(x^{\beta-\delta-\gamma+1}),$$

而当 $\gamma<1+\delta$ 时,

$$\int x^{\beta-\delta}\sin x^{\gamma}\sin x^{\delta+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\delta+1}x^{\beta-2\delta}\sin x^{\gamma}\cos x^{\delta+1}+\cdots=O(x^{\beta-2\delta}),$$

所以

$$u, v = \begin{cases} O(x^{\beta - \frac{\alpha}{2} - \gamma + 1}), & \gamma \geqslant 1 + \delta, \\ O(x^{\beta - \alpha}), & \gamma < 1 + \delta. \end{cases}$$

于是当 $\beta < \min\left\{\frac{\alpha}{4} + \gamma - \frac{3}{2}, \frac{3\alpha}{4} - \frac{1}{2}\right\}$ 时, 定理 3.3.11 的条件 (2) 也满足, 因此当 $\alpha > 2, K \neq 0$ 而 $\beta < \min\left\{\frac{\alpha}{4} + \gamma - \frac{3}{2}, \frac{3\alpha}{4} - \frac{1}{2}\right\}$ 时, 增加了摄动项的微分算式仍是极限圆的.

3.4 Weyl 函数

定义 3.4.1 设微分算式 M 在 ∞ 处为极限点的, 称 $m_\infty(\lambda)$ 为 M 的 Weyl 函数, 记作 $M(\lambda)$.

因为 $\lim\limits_{b \to \infty} C_b(\lambda) = M(\lambda)$, 所以对任何 $0 < b_n < \infty, 0 \leqslant \beta_n < \pi$, 只要 $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$, 就有 $\lim\limits_{n \to \infty} m_{b_n}(\lambda, \beta_n) = M(\lambda)$.

定理 3.4.1 设 M 在 ∞ 处为极限点的, 则

(1) $M(\lambda)$ 分别在$\mathrm{Im}\lambda > 0$ 和 $\mathrm{Im}\lambda < 0$ 上解析;

(2) $M(\overline{\lambda}) = \overline{M(\lambda)}$;

(3) $\mathrm{Im}\lambda > 0$ 时, $\mathrm{Im}M(\lambda) > 0$; $\mathrm{Im}\lambda < 0$ 时, $\mathrm{Im}M(\lambda) < 0$;

(4) $M(\lambda)$ 的零点和极点均在实轴上且为简单的, 残数为负数.

证明 (1) 在上半平面上任取一点 λ_0, 要证明 $M(\lambda)$ 在 λ_0 点解析. 取 λ_0 的一个全部含在上半平面内的闭圆域

$$B_r(\lambda_0) = \{\lambda \,||\lambda - \lambda_0| \leqslant r\},$$

当 $b = 1$ 时, $C_1(\lambda)$ 的圆心 $m_{10}(\lambda)$ 和 $r_1(\lambda)$ 分别是

$$m_{10}(\lambda) = -\frac{[\varphi, \theta](1)}{[\theta, \theta](1)} = -\frac{[\varphi, \theta](1)}{2\mathrm{iIm}\lambda \displaystyle\int_0^1 |\theta|^2 \,\mathrm{d}x},$$

$$r_1(\lambda) = \frac{1}{2\mathrm{Im}\lambda \displaystyle\int_0^1 |\theta|^2 \,\mathrm{d}x},$$

它们都是上半平面的连续函数 (因为分母不等于零, 而 φ, θ 都是 λ 的整函数). 这样当 λ 在 $B_r(\lambda_0)$ 中变时, $m_{10}(\lambda)$ 和 $r_1(\lambda)$ 都有界, 因此 $\bigcup\limits_{\lambda \in B_r(\lambda_0)}$ ($C_1(\lambda)$ 连同内部) 是 m 平面上的有界集.

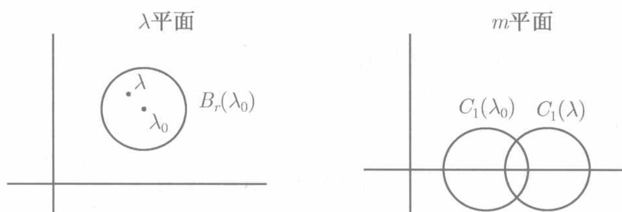


图 3.2

当 $b>1$ 时, 对 $\lambda\in B_r(\lambda_0)$,

$$m_b(\lambda)\in\bigcup_{\lambda\in B_r(\lambda_0)}(C_1(\lambda)\text{连同内部}),$$

所以当 $b\geqslant 1$ 时, $m_b(\lambda)$ 对 $\lambda\in B_r(\lambda_0)$ 一致有界, 而 $m_b(\lambda)$ 是 λ 的半纯函数, 由于它在 $B_r(\lambda_0)$ 上一致有界, 因而不会有极点, 所以 $m_b(\lambda)$, $b\geqslant 1$ 都在 $B_r(\lambda_0)$ 上解析.

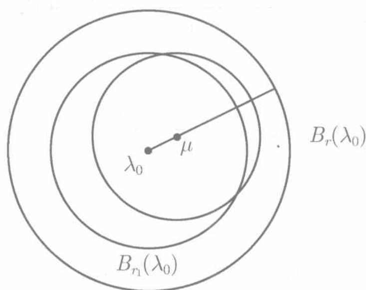


图 3.3

取 $0<r_1<r$, 考虑闭圆域 $B_{r_1}(\lambda_0)$, $\forall\mu\in B_{r_1}(\lambda_0)$, $m_b(\lambda)$ 在 $|\lambda-\mu|\leqslant|r-r_1|$ 上解析. 由 Cauchy 型积分的求导公式

$$m_b'(\mu)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\lambda-\mu|=r-r_1}\frac{m_b(\lambda)}{(\lambda-\mu)^2}\mathrm{d}\lambda$$

可得 (Cauchy 不等式)

$$|m_b'(\mu)|\leqslant\frac{1}{r-r_1}\sup_{\lambda\in B_r(\lambda_0),b\geqslant 1}|m_b(\lambda)|,\quad \mu\in B_{r_1}(\lambda_0)^{①},$$

这样 $m_b(\lambda)$ 便在 $B_{r_1}(\lambda_0)$ 上等度连续, 因此由 Arzela-Ascoli 定理, 存在一串 $b_j\to\infty$, 使得 $\{m_{b_j}(\lambda)\}$ 在 $B_{r_1}(\lambda_0)$ 上一致收敛到 $M(\lambda)$. 于是 $M(\lambda)$ 在 $B_{r_1}(\lambda_0)$ 上解析, 特

① $\left|\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right|\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\frac{(r-r_1)\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}}{(r-r_1)^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\tau}}\right|\mathrm{d}\tau=\frac{1}{r-r_1}$.

别地, 在 λ_0 解析①.

(2) 因为 $m_b\left(\overline{\lambda}\right)=\overline{m_b(\lambda)}$, 所以 $M\left(\overline{\lambda}\right)=\overline{M(\lambda)}$.

(3) 由于 $M(\lambda)$ 在 $C_1(\lambda)$ 内部, 所以

$$0<\int_0^1|\varphi(x,\lambda)+M(\lambda)\theta(x,\lambda)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{\mathrm{Im}M(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda}$$

(如果 $\varphi(x,\lambda)+M\left(\lambda\right)\theta(x,\lambda)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1$, 则由微分方程解的唯一性知 $\varphi(x,\lambda)+M(\lambda)\theta(x,\lambda)\equiv 0$, 与 φ,θ 线性无关矛盾!). 于是 $\mathrm{Im}M(\lambda)$ 与 $\mathrm{Im}\lambda$ 同号.

(4) 由 (1) 和 (3), $M(\lambda)$ 的零点和极点必然在实轴上, 剩下来只需证明零点和极点都是简单的 $\left(M(\lambda)=\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\dfrac{\varphi(b,\lambda)}{\theta(b,\lambda)}\right)\right.$, 所以 $M(\lambda)$ 也可以定义在实轴上$\Big)$. 设 λ_0 是 $M(\lambda)$ 的零点, 如果它不是简单的, 则在 λ_0 附近有 $M(\lambda_0+\mathrm{i}\delta)=(\lambda_0+\mathrm{i}\delta-\lambda_0)^2\cdot h\left(\lambda_0+i\delta\right)$, h 解析. 于是

$$\frac{\mathrm{Im}M\left(\lambda_0+\mathrm{i}\delta\right)}{\mathrm{Im}\left(\lambda_0+\mathrm{i}\delta\right)}=\frac{-\delta^2\mathrm{Im}h\left(\lambda_0+\mathrm{i}\delta\right)}{\delta}\to 0,\quad \delta\to\pm 0.$$

由

$$\int_0^\infty|\varphi+M\theta|^2\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{Im}M(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda},\quad \lambda=\lambda_0+\mathrm{i}\delta,$$

让 $\delta\to\pm 0$, 由 Fatou 引理得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\lim_{\delta\to\pm 0}\inf|\varphi+M\theta|^2\mathrm{d}x&\leqslant\lim_{\delta\to\pm 0}\inf\int_0^\infty|\varphi+M\theta|^2\mathrm{d}x\\&=\lim_{\delta\to\pm 0}\frac{\mathrm{Im}M(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda}=0,\end{aligned}$$

即

$$\int_0^\infty|\varphi|^2\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

可是 φ 为非平凡解, 矛盾. 所以零点是简单的. 对于极点的情形, 可以将 φ, θ 的位置倒一下.

$$y(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+\widetilde{m}\varphi(x,\lambda).$$

由 b 点的边值

$$\cos\beta y(b,\lambda)+\sin\beta p(b)y'(b,\lambda)=0,$$

① $\{m_{b_n}(\lambda)\}$ 在 $C_r(\lambda_0)$ 上一致有界, $\lim\limits_{n\to\infty}m_{b_n}=M(\lambda)$, 其中, $\lambda\in C_r(\lambda_0)$, $C_r(\lambda_0)$ 是有极限点的集合, 所以由 Vitali 定理, 收敛是局部一致收敛.

Vitali 定理　设 $\{f_n(z)\}$ 在 G 内解析, 局部一致有界, 存在一串 $z_\nu\in G$, 它至少在 G 内有一个极限点, $\{f_n(z)\}$ 在每个 z_ν 点收敛, 则 $\{f_n(z)\}$ 在 G 上局部一致收敛.

$$\widetilde{m}=-\frac{\cos\beta\theta(b,\lambda)+\sin\beta p(b)\theta'(b,\lambda)}{\cos\beta\varphi(b,\lambda)+\sin\beta p(b)\varphi'(b,\lambda)}=\frac{1}{m},$$

$$\widetilde{M}(\lambda)=\lim_{b\to\infty}-\frac{\theta(b,\lambda)}{\varphi(b,\lambda)}=\frac{1}{M(\lambda)},$$

$\widetilde{M}(\lambda)$ 零点简单, 即 $M(\lambda)$ 极点简单. 如果 λ_0 是 $M(\lambda)$ 的极点, 则

$$M(\lambda)=\frac{\alpha}{\lambda-\lambda_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda-\lambda_0)^n,$$

$$M(\lambda_0+\mathrm{i}\delta)=\frac{\alpha}{\mathrm{i}\delta}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\mathrm{i}\delta)^n=-\frac{\mathrm{i}\alpha}{\delta}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\mathrm{i}\delta)^n,$$

当 $\delta\to+0$ 时, 有 $\mathrm{Im}M(\lambda_0+\mathrm{i}\delta)\to+\infty$ $\left(注意\ \dfrac{\mathrm{Im}M(\lambda_0+\mathrm{i}\delta)}{\mathrm{Im}(\lambda_0+\mathrm{i}\delta)}>0!\right)$. 但是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(\mathrm{i}\delta)^n$ 中的虚部趋于一个确定的极限, 故 $\alpha<0$, 即 $\mathrm{Res}_{\lambda_0}M(\lambda)<0$.

如果 M 在 ∞ 是极限圆的, 则对任何满足 $\mathrm{Im}\lambda\neq0$ 的 λ,

$$\lim_{b\to\infty}C_b(\lambda)=C_\infty(\lambda),$$

这时 $\lim\limits_{b\to\infty}m_b(\lambda)$ 的极限不唯一, Weyl 函数怎样定义呢? 假设 $\mathrm{Im}\lambda_0\neq0$, $\mathrm{Im}\lambda\neq0$, $\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\in C_\infty(\lambda_0)$, 存在 b_n 和 β_n 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, 而

$$\lim_{n\to\infty}m(\lambda_0,b_n,\beta_n)=\widehat{m}_\infty(\lambda_0).$$

记 $m_n(\lambda)=m(\lambda,b_n,\beta_n)$, 这是一个 λ 的半纯函数, 满足 $\overline{m_n(\lambda)}=m_n(\overline{\lambda})$. 注意到函数

$$y_n(x,\lambda_0)=\varphi(x,\lambda_0)+m_n(\lambda_0)\theta(x,\lambda_0),$$

$$y_n(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+m_n(\lambda)\theta(x,\lambda),$$

在点 b_n 满足同样的边条件

$$\cos\beta_ny(b_n)+\sin\beta_np(b_n)y'(b_n)=0,$$

所以

$$\begin{vmatrix}y_n(b_n,\lambda) & p(b_n)y_n'(b_n,\lambda)\\ y_n(b_n,\lambda_0) & p(b_n)y_n'(b_n,\lambda_0)\end{vmatrix}=0,$$

即

$$p(b_n)W(y_n(\cdot,\lambda),y_n(\cdot,\lambda_0))(b_n)=0,$$

$$\left[y_n(\cdot,\lambda),\overline{y_n(\cdot,\lambda_0)}\right](b_n)=0,$$

$$\left[y_n(\cdot,\lambda),y_n\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b_n)=0,$$

$$\left[\varphi(\cdot,\lambda)+m_n(\lambda)\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+m_n\left(\overline{\lambda_0}\right)\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b_n)=0,$$

$$\begin{aligned}&\left[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)+m_n\left(\overline{\lambda_0}\right)\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})\right](b_n)+m_n(\lambda).\\&\left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)+m_n\left(\overline{\lambda_0}\right)\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})\right](b_n)=0,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}m_n(\lambda)&=-\frac{\left[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)+m_n\left(\overline{\lambda_0}\right)\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b_n)}{\left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\lambda_0)+m_n\left(\overline{\lambda}_0\right)\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b_n)}\\&=-\frac{\left[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b_n)+m_n(\lambda_0)\left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b_n)}{\left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b_n)+m_n(\lambda_0)\left[\theta(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})\right](b_n)}\in C_{b_n}(\lambda).\end{aligned}$$

为了考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}m_n(\lambda)$, 先证明两个引理.

引理 3.4.1 设 G 是 λ 平面上的有界区域, 则当 $b\to\infty$ 时, $[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)$, $[\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)$, $[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)$ 和 $[\theta(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)$ 都在 G 上一致收敛, 极限 $[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda}_0)](\infty)$, $[\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)$, $[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)$ 和 $[\theta(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)$ 是 λ 的整函数.

证明 由 Green 公式

$$\begin{aligned}&\int_0^b\left(\theta(x,\lambda_0)M\varphi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)M\theta(x,\lambda_0)\right)\mathrm{d}x\\&=\left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b)-\left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](0),\end{aligned}$$

注意到

$$M\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda),$$

$$M\theta(x,\lambda_0)=\lambda_0\theta(x,\lambda_0),$$

$$\left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](0)=p(0)W\left(\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\lambda_0)\right)(0)=1,$$

可得

$$(\lambda-\lambda_0)\int_0^b\varphi(x,\lambda)\theta(x,\lambda_0)\mathrm{d}x=\left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda}_0)\right](b)-1,$$

存在 $\alpha\in\mathbf{R}$, 使得 $\lambda\in G$ 时,

$$|\lambda-\lambda_0|<\alpha.$$

设 $b_2 > b_1$, 则

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})\right](b_2)-\left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})\right](b_1)\right| \\
=&\left|(\lambda-\lambda_0)\int_{b_1}^{b_2}\varphi(x,\lambda)\theta(x,\lambda_0)\mathrm{d}x\right| \\
<&\alpha\left\|\varphi(\cdot,\lambda)\right\|\left(\int_{b_1}^{b_2}\left|\theta\left(x,\lambda_0\right)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
<&C\alpha\left(\int_{b_1}^{b_2}\left|\theta(x,\lambda_0)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,\quad b_1,b_2\to\infty,\ (\text{由推论 3.2.3})
\end{aligned}$$

所以 $\left[\varphi(x,\lambda),\theta\left(x,\overline{\lambda_0}\right)\right](b)$ 当 $b\to\infty$ 时在 G 上一致收敛. 因为 $\left[\varphi(x,\lambda),\theta\left(x,\overline{\lambda_0}\right)\right](b)$ 是 λ 的整函数, 所以极限 $\left[\varphi(x,\lambda),\theta\left(x,\overline{\lambda}_0\right)\right](\infty)$ 在 G 上解析, 由于 G 是任一个有界区域, 故此极限为整函数.

引理 3.4.2 $\begin{vmatrix}[f,u](x) & [f,v](x)\\ [g,u](x) & [g,v](x)\end{vmatrix}=[f,\overline{g}](x)[\overline{u},v](x).$

证明

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}[f,u](x) & [f,v](x)\\ [g,u](x) & [g,v](x)\end{vmatrix}
&=[f,u](x)[g,v](x)-[f,v](x)[g,u](x) \\
&=p^2(x)\left(\left(f(x)\overline{u'(x)}-f'(x)\overline{u(x)}\right)\left(g(x)\overline{v'(x)}-g'(x)\overline{v(x)}\right)\right. \\
&\quad\left.-\left(f(x)\overline{v'(x)}-f'(x)\overline{v(x)}\right)\left(g(x)\overline{u'(x)}-g'(x)\overline{u(x)}\right)\right) \\
&=p^2(x)\left(f(x)g'(x)\left(\overline{u(x)v'(x)}-\overline{u'(x)v(x)}\right)\right. \\
&\quad\left.+f'(x)g(x)\left(\overline{u'(x)v(x)}-\overline{u(x)v'(x)}\right)\right) \\
&=p^2(x)\left((f(x)g'(x)-f'(x)g(x))\overline{(u(x)v'(x)-u'(x)v(x))}\right) \\
&=p(x)W(f,g)(x)p(x)W(\overline{u},\overline{v}) \\
&=[f,\overline{g}](x)[\overline{u},v](x).
\end{aligned}$$

这样便有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}m_n(\lambda)&=-\frac{[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)[\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)}{[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)[\theta(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)} \\
&=-\frac{[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)}{[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)},
\end{aligned}$$

后者属于 $C_\infty(\lambda)$, 记为 $\widehat{m}_\infty(\lambda)$. 考虑到 (由引理 3.4.2)

$$\begin{vmatrix} \left[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b) & \left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda}_0\right)\right](b) \\ \left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b) & \left[\theta(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda}_0\right)\right](b) \end{vmatrix}$$

$$=\left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda}\right)\right](b)\left[\varphi(\cdot,\lambda_0),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda}_0\right)\right](b)=1,$$

可得

$$\begin{vmatrix} \left[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty) & \left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda}_0\right)\right](\infty) \\ \left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty) & \left[\theta(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda}_0\right)\right](\infty) \end{vmatrix}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\begin{vmatrix} \left[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b) & \left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda}_0\right)\right](b) \\ \left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](b) & \left[\theta(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda}_0\right)\right](b) \end{vmatrix}=1.$$

因此分式线性变换

$$\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\to\widehat{m}_\infty(\lambda)=-\frac{\left[\varphi\left(\cdot,\lambda\right),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})\right](\infty)+\widehat{m}_\infty\left(\lambda_0\right)\left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})\right](\infty)}{\left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})\right](\infty)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\left[\theta(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty)}$$

是一一的. 同样,

$$\widehat{m}_\infty(\lambda_0)=-\frac{\left[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty)+\widehat{m}_\infty(\lambda)\left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty)}{\left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty)+\widehat{m}_\infty(\lambda)\left[\theta(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})\right](\infty)},$$

由于

$$\begin{vmatrix} \left[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty) & \left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda}_0\right)\right](\infty) \\ \left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty) & \left[\theta(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda}_0\right)\right](\infty) \end{vmatrix}=1,$$

所以 $\widehat{m}_\infty(\lambda)\to\widehat{m}_\infty(\lambda_0)$ 也是一一的. 这样便给出了 $C_\infty(\lambda_0)$ 到 $C_\infty(\lambda)$ 的一个一一对应. 在 $C_\infty(\lambda_0)$ 上任取一点 $\widehat{m}_\infty(\lambda_0)$ 便可唯一确定一点 $\widehat{m}_\infty(\lambda)\in C_\infty(\lambda)$, 把它称为极限圆情形的 Weyl 函数, 这时 Weyl 函数并不唯一.

定义 3.4.2 设微分算式 M 在 ∞ 处为极限圆的, $\mathrm{Im}\lambda_0\neq 0$, 给定 $\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\in C_\infty(\lambda_0)$, 称

$$M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)=\widehat{m}_\infty(\lambda)$$

为 M 的 Weyl 函数.

定理 3.4.2 设 M 在 ∞ 处为极限圆, $\mathrm{Im}\lambda_0\neq 0$, $\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\in C_\infty\left(\lambda_0\right)$, 则

(1) $M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)$ 是全平面上定义的半纯函数且

$$M\left(\overline{\lambda},\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)=\overline{M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)};$$

(2) λ 是 $M\left(\lambda,,\widehat{m}_\infty\left(\lambda_0\right)\right)$ 的极点的充要条件是

$$(\lambda-\lambda_0)\int_0^\infty\theta(x,\lambda)\left(\varphi(x,\lambda_0)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta\left(x,\lambda_0\right)\right)\mathrm{d}x=1.$$

证明 (1)

$$M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))=-\frac{[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)}{[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)}$$

(本来只是对 $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ 得到这个公式, 但它对 $\mathrm{Im}\lambda=0$ 也有意义!).

$$\begin{aligned}
&[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda}_0)](\infty)\\
=&\lim_{b\to\infty}[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\\
=&[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](0)\\
&+\lim_{b\to\infty}\int_0^b((\varphi(x,\lambda_0)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x,\lambda_0))\,M\varphi(x,\lambda)\\
&-\varphi(x,\lambda)M\left(\varphi(x,\lambda_0)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x,\lambda_0)\right))\,\mathrm{d}x\\
=&\begin{vmatrix}\sin\alpha & \sin\alpha+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\cos\alpha\\ -\cos\alpha & -\cos\alpha+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\sin\alpha\end{vmatrix}\\
&+\lim_{b\to\infty}\int_0^b(\lambda-\lambda_0)\varphi(x,\lambda)\left(\varphi(x,\lambda_0)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x,\lambda_0)\right)\mathrm{d}x\\
=&\widehat{m}_\infty(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)\int_0^\infty\varphi(x,\lambda)\left(\varphi(x,\lambda_0)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\,\theta(x,\lambda_0)\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

同样,

$$\begin{aligned}
&[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda}_0)](\infty)\\
=&\lim_{b\to\infty}[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\\
=&[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](0)\\
&+\lim_{b\to 0}\int_0^b((\varphi(x,\lambda_0)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x,\lambda_0))M\theta(x,\lambda)\\
&-\theta(x,\lambda)M(\varphi(x,\lambda_0)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x,\lambda_0)))\mathrm{d}x\\
=&\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\cos\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\sin\alpha\end{vmatrix}\\
&+\lim_{b\to 0}\int_0^b(\lambda-\lambda_0)\theta(x,\lambda)(\varphi(x,\lambda_0)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x,\lambda_0))\mathrm{d}x\\
=&-1+(\lambda-\lambda_0)\int_0^\infty\theta(x,\lambda)\left(\varphi(x,\lambda_0)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(x,\lambda_0)\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

于是, $M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))$ 的分子分母都是整函数, 如果分子, 分母都是 0, 则方程组

$$\begin{cases}\left[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty)=0,\\ \left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\left[\theta(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty)=0\end{cases}$$

有非零解, 故

$$\begin{vmatrix} \left[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty) & \left[\varphi(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda}_0\right)\right](\infty) \\ \left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right)\right](\infty) & \left[\theta(\cdot,\lambda),\theta\left(\cdot,\overline{\lambda}_0\right)\right](\infty) \end{vmatrix} = 0.$$

此为不可能, 所以分子, 分母不能同时为零, 因而 $M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)$ 是半纯函数.

(2) $M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)$ 的极点是 $\left[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})\right](\infty)$ 的零点. 反过来, 后者的零点必是分子不为零的点, 因而也是 $M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)$ 的极点.

由于

$$\frac{\mathrm{Im}m_n(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda} = \int_0^{b_n} |\varphi(x,\lambda)+m_n(\lambda)\theta(x,\lambda)|^2\mathrm{d}x, \quad \mathrm{Im}\lambda\neq 0,$$

记

$$\psi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)\theta(x,\lambda), \quad \psi_n(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+m_n(\lambda)\theta(x,\lambda),$$

则

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\mathrm{Im}M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)}{\mathrm{Im}\lambda} - \int_0^\infty |\psi(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant &\left|\frac{\mathrm{Im}M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)}{\mathrm{Im}\lambda} - \frac{\mathrm{Im}m_n(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda}\right| + \left|\int_0^{b_n}|\psi_n(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty|\psi(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x\right|, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^{b_n}|\psi_n(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty|\psi(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant &\left|\int_0^{b_n}|\psi_n(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x - \int_0^{b_n}|\psi(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{b_n}^\infty|\psi(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x\right|, \\ &\left|\int_0^{b_n}|\psi_n(x,\lambda)|^2\mathrm{d}x - \int_0^{b_n}|\psi(x,\lambda)|^2\mathrm{d}x\right| \\ = &\left|\|\psi_n(\cdot,\lambda)\|_n^2 - \|\psi(\cdot,\lambda)\|_n^2\right| \\ = &\left|\|\psi_n(\cdot,\lambda)\|_n - \|\psi(\cdot,\lambda)\|_n\right|\left|\|\psi_n(\cdot,\lambda)\|_n + \|\psi(\cdot,\lambda)\|_n\right| \\ \leqslant &\left|\|\psi_n(\cdot,\lambda)-\psi(\cdot,\lambda)\|_n\right|\left|\|\psi_n(\cdot,\lambda)\|_n + \|\psi(\cdot,\lambda)\|\right|, \end{aligned}$$

$$\|\psi_n(\cdot,\lambda)\|_n = \|\varphi(\cdot,\lambda)+m_n(\lambda)\theta(\cdot,\lambda)\|_n \leqslant \|\varphi(\cdot,\lambda)\| + |m_n(\lambda)|\,\|\theta(\cdot,\lambda)\|,$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} m_n(\lambda) = M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)$, 所以存在 $N_1>0$, 当 $n\geqslant N_1$ 时,

$$|m_n(\lambda)| < \left|M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)\right| + 1.$$

于是当 $n \geqslant N_1$ 时,

$$\|\psi_n(\cdot,\lambda)\|_n \leqslant \|\varphi(\cdot,\lambda)\| + (|M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))|+1)\|\theta(\cdot,\lambda)\| < C,$$

$$\begin{aligned}\|\psi(\cdot,\lambda)-\psi_n(\cdot,\lambda)\|_n &= \|(M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))-m_n(\lambda))\,\theta(\cdot,\lambda)\|_n\\ &\leqslant |M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))-m_n(\lambda)|\,\|\theta(\cdot,\lambda)\|\\ &< C\,|M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))-m_n(\lambda)|,\end{aligned}$$

所以当 $n \geqslant N_1$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{b_n}|\psi_n(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x-\int_0^{b_n}|\psi(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \|\psi(\cdot,\lambda)-\psi_n(\cdot,\lambda)\|_n\,(\|\psi(\cdot,\lambda)\|+C)\\ &\leqslant 2C^2\,|M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))-m_n(\lambda)|.\end{aligned}$$

再取 N_2, 使得当 $n \geqslant N_2$ 时,

$$|M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))-m_n(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{4C^2}.$$

再取 N_3, 使得当 $n \geqslant N_3$ 时,

$$\left|\int_{b_n}^{\infty}|\psi(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n \geqslant N = \max(N_1,N_2,N_3)$ 时,

$$\left|\int_0^{b_n}|\psi_n(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x-\int_0^{\infty}|\psi(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

所以

$$\frac{\mathrm{Im}M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))}{\mathrm{Im}\lambda} = \int_0^{\infty}|\varphi(x,\lambda)+M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))\,\theta(x,\lambda)|^2\mathrm{d}x, \quad \mathrm{Im}\lambda \neq 0,$$

即

$$\mathrm{Im}M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)) = \mathrm{Im}\lambda\int_0^{\infty}|\varphi(x,\lambda)+M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))\,\theta(x,\lambda)|^2\mathrm{d}x, \quad \mathrm{Im}\lambda \neq 0.$$

如果 $\mathrm{Im}\lambda = 0$, 由

$$\mathrm{Im}M(\lambda+\mathrm{i}\delta,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)) = \delta\int_0^{\infty}|\varphi(x,\lambda+\mathrm{i}\delta)+M(\lambda+\mathrm{i}\delta,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))\,\theta(x,\lambda+\mathrm{i}\delta)|^2\mathrm{d}x,$$

利用推论 3.2.3 知

$$|\mathrm{Im}M(\lambda+\mathrm{i}\delta,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))| < C\,|\delta|,$$

所以

$$\operatorname{Im}M\left(\lambda,\widehat{m}_{\infty}(\lambda_0)\right)=0.$$

这说明

$$\operatorname{Im}\lambda\neq 0,\quad \operatorname{Im}M\left(\lambda,\widehat{m}_{\infty}\left(\lambda_0\right)\right)\neq 0,$$

$$\operatorname{Im}\lambda=0,\quad \operatorname{Im}M\left(\lambda,\widehat{m}_{\infty}\left(\lambda_0\right)\right)=0.$$

所以 $M\left(\lambda,\widehat{m}_{\infty}(\lambda_0)\right)$ 的零点在实轴上.

定理 3.4.3　$M\left(\lambda,\widehat{m}_{\infty}\left(\lambda_0\right)\right)$ 的零点和极点在实轴上, 都是简单的.

证明　如果 $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, 则 $M\left(\lambda,\widehat{m}_{\infty}(\lambda_0)\right)\in C_{\infty}(\lambda)$, 所以 λ 不是 $M\left(\lambda,\widehat{m}_{\infty}(\lambda_0)\right)$ 的极点. 因此极点也在实轴上. 零点简单的证明与定理 3.4.1 同, 极点简单的证明见下一节.

3.5　Weyl 解

在极限点情形下, Weyl 解是唯一的, 即

$$\psi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+M(\lambda)\theta(x,\lambda).$$

在极限圆情形, 对任意的 $\widehat{m}_{\infty}(\lambda_0)\in C_{\infty}(\lambda_0)$, Weyl 解为

$$\psi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+M(\lambda,\widehat{m}_{\infty}(\lambda_0))\theta(x,\lambda),$$

它依赖于 $\widehat{m}_{\infty}(\lambda_0)$ 的选取.

定理 3.5.1 (Titchmarsh)　Weyl 解有下列性质 (λ,λ' 为非实数):

(1) $\psi(x,\overline{\lambda})=\overline{\psi(x,\lambda)}$;

(2)

$$\lim_{b\to\infty}[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')](b)=0;$$

(3)

$$\int_0^{\infty}\psi(x,\lambda)\psi(x,\lambda')\mathrm{d}x=\frac{M(\lambda)-M(\lambda')}{\lambda-\lambda'}\quad\left(\frac{M(\lambda,\widehat{m}_{\infty}(\lambda_0))-M(\lambda',\widehat{m}_{\infty}(\lambda_0))}{\lambda-\lambda'}\right);$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}|\psi(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\operatorname{Im}M(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda}\quad\left(\frac{\operatorname{Im}M(\lambda,\widehat{m}_{\infty}(\lambda_0))}{\operatorname{Im}\lambda}\right)$.

证明　(1) 因为

$$\varphi(x,\overline{\lambda})=\overline{\varphi(x,\lambda)},\quad \theta(x,\overline{\lambda})=\overline{\theta(x,\lambda)},\quad M(\overline{\lambda})=\overline{M(\lambda)},$$

所以

$$\psi(x,\overline{\lambda})=\overline{\psi(x,\lambda)}.$$

(2)

(i) 极限点情形.

在点 b, $\varphi(x,\lambda)+m_b(\lambda)\theta(x,\lambda)$ 满足

$$\cos\beta y(b)+\sin\beta p(b)y'(b)=0,$$

这是一个与 λ 无关的边界条件, 所以

$$\begin{aligned}0&=[\varphi(\cdot,\lambda)+m_b(\lambda)\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\lambda')+m_b(\lambda')\theta(\cdot,\lambda')](b)\\&=[\psi(\cdot,\lambda)+(m_b(\lambda)-M(\lambda))\,\theta(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')+(m_b(\lambda')-M(\lambda'))\,\theta(\cdot,\lambda')](b)\\&=[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')](b)+(m_b(\lambda)-M(\lambda))\,[\theta(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')](b)\\&\quad+\overline{(m_b(\lambda')-M(\lambda'))}[\psi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\lambda')](b)\\&\quad+(m_b(\lambda)-M(\lambda))\,\overline{(m_b(\lambda')-M(\lambda'))}[\theta(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\lambda')](b),\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}[\theta(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')](b)&=[\theta(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')](0)\\&\quad+\int_0^b\left(\overline{\psi(x,\lambda')}M\theta(x,\lambda)-\theta(x,\lambda)\overline{M\psi(x,\lambda')}\right)\mathrm{d}x\\&=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha+M(\lambda')\cos\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha+M(\lambda')\sin\alpha\end{vmatrix}+(\lambda-\overline{\lambda'})\int_0^b\theta(x,\lambda)\overline{\psi(x,\lambda')}\mathrm{d}x\\&=-1+(\lambda-\overline{\lambda'})\int_0^b\theta(x,\lambda)\overline{\psi(x,\lambda')}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|[\theta(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')](b)|&\leqslant 1+\left|\lambda-\overline{\lambda'}\right|\left(\int_0^b|\theta(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_0^\infty|\psi(x,\lambda')|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\\&=1+O\left(\left(\int_0^b|\theta(x,\lambda)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\right)\\&=1+O\left(\frac{1}{\sqrt{r_b}}\right),\end{aligned}$$

另外

$$|m_b(\lambda)-M(\lambda)|\leqslant 2r_b,\quad \lim_{b\to\infty}C_b(\lambda)=M(\lambda),\quad \bigcap_{b>0}\{C_b(\lambda)\text{及其内部}\}=\{M(\lambda)\},$$

所以

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \lim_{b\to\infty} |(m_b(\lambda)-M(\lambda))[\theta(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')](b)|\\ &\leqslant \lim_{b\to\infty}\left|2r_b\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{r_b}}\right)\right)\right| = \lim_{b\to\infty}\left(2r_b+O\left(\sqrt{r_b}\right)\right)=0.\end{aligned}$$

类似地, 可以证明

$$\lim_{b\to\infty}\overline{(m_b(\lambda')-M(\lambda'))}[\psi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\lambda')](b)=0,$$
$$\lim_{b\to\infty}(m_b(\lambda)-M(\lambda))\overline{(m_b(\lambda')-M(\lambda'))}[\theta(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\lambda')](b)=0,$$

故

$$\lim_{b\to\infty}[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')](b)=0.$$

(ii) 极限圆情形.

想要 $\lim\limits_{b\to\infty}[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')](b)=0$, 考虑

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b) & [\psi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\\ [\psi(\cdot,\overline{\lambda'}),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b) & [\psi(\cdot,\overline{\lambda}'),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\end{vmatrix}\\ &=[\psi(\cdot,\lambda_0),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')](b),\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}[\psi(\cdot,\lambda_0),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)&=[\varphi(\cdot,\lambda_0)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\theta(\cdot,\lambda_0),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\\ &=[\varphi(\cdot,\lambda_0),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)[\theta(\cdot,\lambda_0),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\\ &=p(b)W(\varphi(\cdot,\lambda_0),\theta(\cdot,\lambda_0))(b)+\widehat{m}_\infty(\lambda_0)p(b)W(\theta(\cdot,\lambda_0),\theta(\cdot,\lambda_0))(b)\\ &=p(b)W(\varphi(\cdot,\lambda_0),\theta(\cdot,\lambda_0))(b)=p(0)W(\varphi(\cdot,\lambda_0),\theta(\cdot,\lambda_0))(0)=1,\end{aligned}$$

所以

$$[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')](b)=\begin{vmatrix}[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b) & [\psi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\\ [\psi(\cdot,\overline{\lambda'}),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b) & [\psi(\cdot,\overline{\lambda'}),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\end{vmatrix},$$

而

$$\begin{aligned}[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)&=[\varphi(\cdot,\lambda)+M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)\theta(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\\ &=[\varphi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)+M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)[\theta(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\\ &\to[\varphi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)+M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)[\theta(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)=0\end{aligned}$$

$$\left(M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)=-\frac{[\varphi(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)}{[\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0})+\overline{\widehat{m}_\infty(\lambda_0)}\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)}\right),$$

$$
\begin{aligned}
[\psi(\cdot,\overline{\lambda'}),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b) =& [\varphi(\cdot,\overline{\lambda'})+M\left(\overline{\lambda'},\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)\theta(\cdot,\overline{\lambda'}),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\\
=& [\varphi(\cdot,\overline{\lambda'}),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)+M\left(\overline{\lambda'},\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)\left[\theta(\cdot,\overline{\lambda}'),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})\right](b)\\
\to& [\varphi(\cdot,\overline{\lambda'}),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)+M\left(\overline{\lambda'},\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)\\
& [\theta(\cdot,\overline{\lambda'}),\psi(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\psi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b) =& [\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)+M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)[\theta(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\\
\to& [\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)+M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)[\theta(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)
\end{aligned}
$$

(由引理 3.4.1 知道极限存在!),

$$
\begin{aligned}
[\psi(\cdot,\overline{\lambda'}),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b) =& [\varphi(\cdot,\overline{\lambda'}),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)+M\left(\overline{\lambda'},\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)[\theta(\cdot,\overline{\lambda'}),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](b)\\
\to& [\varphi(\cdot,\overline{\lambda'}),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty)+M\left(\overline{\lambda}',\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)[\theta(\cdot,\overline{\lambda'}),\theta(\cdot,\overline{\lambda_0})](\infty),
\end{aligned}
$$

因此

$$
\lim_{b\to\infty}\left[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda')\right](b)=0.
$$

(3) 由 Green 公式

$$
\begin{aligned}
&\int_0^b (\psi(x,\lambda')M\psi(x,\lambda)-\psi(x,\lambda)M\psi(x,\lambda'))\mathrm{d}x\\
=&\left[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda'})\right](b)-\left[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda'})\right](0),
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
\left[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda'})\right](0) =& p(0)W(\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda'))(0)\\
=& p(0)W(\varphi(\cdot,\lambda)+M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\lambda')\\
& +M(\lambda',\widehat{m}_\infty(\lambda_0))\theta(\cdot,\lambda'))(0)\\
=& p(0)M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))W(\theta(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\lambda'))(0)\\
& +p(0)M(\lambda',\widehat{m}_\infty(\lambda_0))W(\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\lambda'))(0)\\
=& M(\lambda',\widehat{m}_\infty(\lambda_0))-M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&(\lambda-\lambda')\int_0^b \psi(x,\lambda)\psi(x,\lambda')\mathrm{d}x\\
=&\left[\psi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\overline{\lambda}')\right](b)-(M(\lambda',\widehat{m}_\infty(\lambda_0))-M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))).
\end{aligned}
$$

让 $b\to\infty$ 得

$$
\int_0^\infty \psi(x,\lambda)\psi(x,\lambda')\mathrm{d}x=\frac{M(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))-M(\lambda',\widehat{m}_\infty(\lambda_0))}{\lambda-\lambda'}.
$$

极限点的情形证明是一样的.

(4) 取 $\lambda' = \overline{\lambda}$, 由 (3) 便可得

$$\int_0^{\infty} |\psi(x,\lambda)|^2 \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Im}M(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda}.$$

推论 3.5.1　若 $M(\lambda, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))$ 有极点, 则必为简单的.

证明　设 μ_0 是它的 k 阶极点, $k > 1$, 则

$$\lim_{\lambda \to \mu_0} (\lambda - \mu_0)^k M(\lambda, \widehat{m}_\infty(\lambda_0)) = \alpha \neq 0.$$

设 $\lambda = \mu_0 + \mathrm{i}\nu$, 则

$$\lim_{\nu \to 0} (\mathrm{i}\nu)^k M(\mu_0 + \mathrm{i}\nu, \widehat{m}_\infty(\lambda_0)) = \alpha \neq 0.$$

对于固定的 A,

$$\int_0^{A} |\psi(x,\lambda)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{Im}M(\lambda, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))}{\mathrm{Im}\lambda}.$$

以 $\lambda = \mu_0 + \mathrm{i}\nu$ 代入, 并乘两边以 ν^{2k} 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{A} \left|(\mathrm{i}\nu)^k \varphi(x, \mu_0 + \mathrm{i}\nu) + (\mathrm{i}\nu)^k M(\mu_0 + \mathrm{i}\nu, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))\theta(x, \mu_0 + \mathrm{i}\nu)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant \nu^{2k-1} \mathrm{Im}M(\mu_0 + \mathrm{i}\nu, \widehat{m}_\infty(\lambda_0)) \\
&\leqslant |\nu|^{2k-1} \left|M(\mu_0 + \mathrm{i}\nu, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))\right|.
\end{aligned}$$

让 $\nu \to 0$ 便得

$$|\alpha|^2 \int_0^{A} |\theta(x, \mu_0)|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant 0,$$

矛盾!

3.6　$T_0(M)$ 的自伴延拓

前面已经考虑了 $T_0(M)$ 的亏指数, 并研究了方程 $My = \lambda y$ 属于 $L^2[0, \infty)$ 的解有哪些性质, 现在来求 $T_0(M)$ 的自伴延拓.

定理 3.6.1　设 M 在 ∞ 为极限点, T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 则

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \,|\sin\theta f(0) - \cos\theta p(0) f'(0) = 0\}.$$

证明　由对称算子自伴延拓的 Calkin 描述知道

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) | \langle f, f_1 \rangle = 0\},$$

其中, f_1 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关且满足 $\langle f_1, f_1\rangle = 0$. 取 $a > 0, h_1, h_2$ 是实的无穷次可微函数, 满足

$$h_1(0) = 1,\ \ p(0)h_1'(0) = 0,\ \ h_2(0) = 0,\ p(0)h_2'(0) = 1,\ \mathrm{supp}h_i \subset [0, a],\quad i = 1, 2,$$

则 h_1, h_2 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关. 这样 $\mathscr{D}(T_1(M))/\mathscr{D}(T_0(M))$ 都是 h_1, h_2 的线性组合, 所以令 $f_1 = \omega h_1 + \delta h_2$, 只要 ω, δ 不同时为零, f_1 便是模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关的函数. 由于

$$\begin{aligned}
\langle f_1, f_1\rangle =& [f_1, f_1]_0^\infty = -[f_1, f_1](0)\\
=& -\left(|\omega|^2[h_1, h_1](0) + \omega\overline{\delta}[h_1, h_2](0) + \overline{\omega}\delta[h_2, h_1](0) + |\delta|^2[h_2, h_2](0)\right)\\
=& -\left(\omega\overline{\delta} - \overline{\omega}\delta\right)[h_1, h_2](0) = -\left(\omega\overline{\delta} - \overline{\omega}\delta\right)p(0)W\left(h_1, \overline{h}_2\right)(0)\\
=& -\left(\omega\overline{\delta} - \overline{\omega}\delta\right) = -2\mathrm{Im}\omega\overline{\delta}.
\end{aligned}$$

所以当取 ω, δ 使 $\mathrm{Im}\omega\overline{\delta} = 0$ 时, f_1 满足条件 $\langle f_1, f_1\rangle = 0$, 而

$$\begin{aligned}
\langle f, f_1\rangle =& -[f, f_1](0) = -\overline{\omega}[f, h_1](0) - \overline{\delta}[f, h_2](0)\\
=& -\overline{\omega}p(0)W\left(f, \overline{h}_1\right)(0) - \overline{\delta}p(0)W\left(f, \overline{h}_2\right)(0)\\
=& \overline{\omega}p(0)f'(0) - \overline{\delta}f(0).
\end{aligned}$$

这样, 条件 $\langle f, f_1\rangle = 0$ 便变成

$$\overline{\delta}f(0) - \overline{\omega}p(0)f'(0) = 0.$$

设 $\omega = a + \mathrm{i}b, \delta = c + \mathrm{i}d$, 则

$$\omega\overline{\delta} = (a + \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d) = (ac + bd) + \mathrm{i}(bc - ad).$$

由于 $\mathrm{Im}\omega\overline{\delta} = 0$, 所以

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

这就是说,

$$\omega = a + \mathrm{i}b = \lambda(c + \mathrm{i}d) = \lambda\delta \text{ 或 } \delta = \mu\omega, \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

如果 $\omega \neq 0$, 则

$$p(0)f'(0) - \mu f(0) = 0.$$

将 μ 表示成 $\tan\theta$ 得

$$\sin\theta f(0) - \cos\theta p(0)f'(0) = 0.$$

如果 $\delta \neq 0$, 则

$$f(0) - \lambda p(0) f'(0) = 0.$$

将 λ 表示成 $\cot\theta$ 得 $\sin\theta f(0) - \cos\theta p(0) f'(0) = 0$.

可见在极限点情形, 为了得到自伴延拓域, 只需要在常型端点加上边界条件便行了.

例 3.6.1 $M = -D^2, x \in [0, \infty)$. M 在 ∞ 为极限点, 亏指数为 $(1,1)$. 如果 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 则 $\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \,|\sin\theta f(0) - \cos\theta f'(0) = 0\}$, $\theta \in \mathbf{R}$.

下面考虑极限圆情形的自伴延拓.

引理 3.6.1 对任意的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_n$, 存在 $f \in C^\infty[a,b]$ 使得

$$f^{(k-1)}(a) = \alpha_k, \quad f^{(k-1)}(b) = \beta_k, \quad k = 1, \cdots, n.$$

证明 设 $P(x)$ 是 n 阶多项式, 令

$$\begin{cases} P(b) = \beta_1, \\ P'(b) = \beta_2, \\ \cdots \\ P^{(n-1)}(b) = \beta_n, \end{cases}$$

$n+1$ 个未知数只有 n 个方程, 总有解. 作 $p(x)$ 使得 $p \in C^\infty(\mathbf{R})$ 且

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\infty, \dfrac{3a+b}{4}\right], \\ 1, & x \in \left[\dfrac{a+3b}{4}, \infty\right), \end{cases}$$

则 $u = Pp \in C^\infty[a,b]$ 满足

$$\begin{aligned} &u(b) = \beta_1, \quad u'(b) = \beta_2, \quad \cdots, \quad u^{(n-1)}(b) = \beta_n, \\ &u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(n-1)}(a) = 0, \end{aligned}$$

同样可得 $v \in C^\infty[a,b]$, 使得

$$\begin{aligned} &v(b) = v'(b) = \cdots = v^{(n-1)}(b) = 0, \\ &v(a) = \alpha_1, \quad v(a) = \alpha_2, \quad \cdots, \quad v^{(n-1)}(a) = \alpha_n. \end{aligned}$$

令 $f = u + v$ 即可.

定理 3.6.2 设微分算子 M 在 ∞ 为极限圆, $\psi(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + M(\lambda, \widehat{m}_\infty(\lambda_0)) \cdot \theta(x,\lambda)$ 是它的一个 Weyl 解, 则

$$\mathscr{D} = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \,|\sin\alpha f(0) - \cos\alpha p(0) f'(0) = 0, \quad [f,\psi](\infty) = 0\}$$

是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓域, 称为 $T_0(M)$ 的 Weyl-Titchmarsh 域.

证明 由于 $\theta(\cdot,\lambda)$ 和 $\psi(\cdot,\lambda)\in L^2[0,\infty)$, 作 f_1,f_2 如下:

$$f_1(x)=\begin{cases}\theta(x,\lambda), & 0\leqslant x\leqslant a,\\ u(x), & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & b\leqslant x\leqslant\infty,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ v(x), & a\leqslant x\leqslant b,\\ \psi(x,\lambda), & b\leqslant x<\infty,\end{cases}$$

其中, $u,v\in C^\infty[a,b]$ 满足

$$u(a)=\theta(a,\lambda),\quad u'(a)=\theta'(a,\lambda),\quad u(b)=0,\quad u'(b)=0,$$

$$v(a)=v'(a)=0,\quad v(b)=\psi(b,\lambda),\quad v'(b)=\psi'(b,\lambda).$$

显然, $f_1,f_2\in\mathscr{D}(T_1(M))$, 因为

$$\langle f_1,\theta\rangle=[f_1,\theta]_0^\infty=-[f_1,\theta](0)=-[\theta,\theta](0)=-p(0)W\left(\theta,\overline{\theta}\right)(0)=0,$$

$$\begin{aligned}\langle f_1,\psi\rangle&=[f_1,\psi]_0^\infty=-[f_1,\psi](0)=-[\theta,\psi](0)\\&=-p(0)W\left(\theta,\overline{\psi}\right)(0)=-p(0)W\left(\theta,\overline{\varphi}\right)(0)=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f_2,\theta\rangle&=[f_2,\theta]_0^\infty=[f_2,\theta](\infty)=[\psi,\theta](\infty)\\&=[\varphi,\theta](\infty)+M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)[\theta,\theta](\infty)\\&=\lim_{b\to\infty}\left([\varphi,\theta](b)+M\left(\lambda,\widehat{m}_\infty(\lambda_0)\right)[\theta,\theta](b)\right)\\&=\lim_{b\to\infty}[\varphi,\theta](b)=\lim_{b\to\infty}p(b)W\left(\varphi,\overline{\theta}\right)(b)\\&=\lim_{b\to\infty}p(0)W\left(\varphi,\overline{\theta}\right)(0)=1,\end{aligned}$$

$$\langle f_2,\psi\rangle=[f_2,\psi]_0^\infty=[f_2,\psi](\infty)=[\psi,\psi](\infty)=0,$$

$$\begin{vmatrix}\langle f_1,\theta\rangle & \langle f_1,\psi\rangle\\ \langle f_2,\theta\rangle & \langle f_2,\psi\rangle\end{vmatrix}=-1\neq0,$$

所以 f_1,f_2 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关. 另外

$$\langle f_1,f_1\rangle=[f_1,f_1]_0^\infty=-[\theta,\theta](0)=0,$$

$$\langle f_1,f_2\rangle=[f_1,f_2]_0^\infty=0,$$

$$\langle f_2,f_2\rangle=[f_2,f_2]_0^\infty=[\psi,\psi](\infty)=0,$$

所以

$$\mathscr{D}=\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,|\langle f,f_1\rangle=\langle f,f_2\rangle=0\}$$

是 $T_0(M)$ 的自伴延拓域. 而

$$\langle f, f_1\rangle = -[f,\theta](0) = -p(0)W\left(f,\overline{\theta}\right)(0) = -\left(\sin\alpha f(0) - \cos\alpha p(0)f'(0)\right),$$

$$\langle f, f_2\rangle = [f,\psi](\infty),$$

故

$$\mathscr{D} = \left\{f \in \mathscr{D}(T_1(M))\,|\sin\alpha f(0) - \cos\alpha p(0)f'(0) = 0, [f,\psi](\infty) = 0\right\}.$$

引理 3.6.2　设 $\mathrm{Im}\lambda_0 \neq 0, \mathrm{Im}\lambda_1 \neq 0$, 则对任意的 $f \in \mathscr{D}(T_1(M))$, $[f,\psi(\cdot,\lambda_0)](\infty) = 0$ 的充要条件是 $[f,\psi(\cdot,\lambda_1)](\infty) = 0$(即与 λ 无关).

证明

$$\begin{vmatrix} [f,\psi(\cdot,\lambda_0)](x) & [f,\theta(\cdot,\lambda_0)](x) \\ \left[\psi\left(\cdot,\overline{\lambda_1}\right),\psi(\cdot,\lambda_0)\right](x) & \left[\psi\left(\cdot,\overline{\lambda_1}\right),\theta(\cdot,\lambda_0)\right](x) \end{vmatrix} = [f,\psi(\cdot,\lambda_1)](x)\left[\psi\left(\cdot,\overline{\lambda_0}\right),\theta(\cdot,\lambda_0)\right](x),$$

$$\begin{aligned}[\psi(\cdot,\overline{\lambda_0}),\theta(\cdot,\lambda_0)](x) &= [\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0}),\theta(\cdot,\lambda_0)](x) + \overline{M(\lambda_0,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))}[\theta(\cdot,\overline{\lambda_0}),\theta(\cdot,\lambda_0)](x)\\ &= [\varphi(\cdot,\overline{\lambda_0}),\theta(\cdot,\lambda_0)](0) + \overline{M(\lambda_0,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))}[\theta(\cdot,\overline{\lambda_0}),\theta(\cdot,\lambda_0)](0) = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\psi(\cdot,\overline{\lambda_1}),\theta(\cdot,\lambda_0)](x) &= [\varphi(\cdot,\overline{\lambda_1}),\theta(\cdot,\lambda_0)](x) + \overline{M(\lambda_1,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))}[\theta(\cdot,\overline{\lambda_1}),\theta(\cdot,\lambda_0)](x)\\ &= [\varphi(\cdot,\overline{\lambda_1}),\theta(\cdot,\lambda_0)](0) + \overline{M(\lambda_1,\widehat{m}_\infty(\lambda_0))}[\theta(\cdot,\overline{\lambda_1}),\theta(\cdot,\lambda_0)](0) = 1,\end{aligned}$$

而

$$\lim_{x\to\infty}\left[\psi\left(\cdot,\overline{\lambda_1}\right),\psi(\cdot,\lambda_0)\right](x) = 0,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}[f,\theta(\cdot,\lambda_0)](x) &= \lim_{x\to\infty}\left([f,\theta(\cdot,\lambda_0)](0) + \int_0^x\left(Mf(t)\overline{\theta(t,\lambda_0)} - f(t)\overline{M\theta(t,\lambda_0)}\right)\mathrm{d}t\right)\\ &= [f,\theta(\cdot,\lambda_0)](0) + \int_0^\infty\left(Mf(t)\overline{\theta(t,\lambda_0)} - f(t)\overline{M\theta(t,\lambda_0)}\right)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故得

$$[f,\psi(\cdot,\lambda_0)](\infty) = [f,\psi(\cdot,\lambda_1)](\infty).$$

推论 3.6.1　给定 $\mathrm{Im}\lambda_0 \neq 0$, $\widehat{m}_\infty(\lambda_0) \in C_\infty(\lambda_0), T_0(M)$ 就有一个 Weyl-Titchmarsh 自伴延拓 T

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(T) &= \{f\,|f \in \mathscr{D}(T_1(M)), \sin\alpha f(0) - \cos\alpha p(0)f'(0) = 0, [f,\psi(\cdot,\lambda_0)](\infty) = 0\}\\ &= \{f \in \mathscr{D}(T_1(M))\,|\sin\alpha f(0) - \cos\alpha p(0)f'(0) = 0, [f,\psi(\cdot,\lambda)](\infty) = 0, \mathrm{Im}\lambda \neq 0\}.\end{aligned}$$

从这里可以看到, 极限圆情形的自伴延拓域要在常型端点和奇型端点都加上边界条件, 不过这两个边界条件是分离的. 但是 Weyl-Titchmarch 域并不是全部的 $T_0(M)$ 的自伴延拓域. 由于极限点情形下, $[f,\psi](\infty) = 0$ 自然成立. 所以在极限点

情形, $T_0(M)$ 的自伴延拓域都是 Weyl-Titchmarsh 域. 下面给出一般的 $T_0(M)$ 的自伴延拓域.

引理 3.6.3 设 M 是极限圆的, 则对任意的 $a,b,c,d\in\mathbf{C}$, 存在 $h\in\mathscr{D}(T_1(M))$, 使得

$$h(0)=a,\quad h'(0)=b,\quad [h,\varphi(\cdot,\lambda)](\infty)=c,\quad [h,\theta(\cdot,\lambda)](\infty)=d,$$

其中, λ 是实数.

证明 对实的 λ, 有

$$0=(M\varphi,\theta)-(\varphi,M\theta)=[\varphi,\theta](\infty)-[\varphi,\theta](0),$$

所以

$$[\varphi,\theta](\infty)=1.$$

同理,

$$[\varphi,\varphi](\infty)=[\theta,\theta](\infty)=0,\quad [\theta,\varphi](\infty)=-1.$$

令 $f_2=d\varphi(\cdot,\lambda)-c\theta(\cdot,\lambda)$, 则

$$[f_2,\varphi(\cdot,\lambda)](\infty)=c,\quad [f_2,\theta(\cdot,\lambda)](\infty)=d.$$

取 $l\in(0,\infty)$, 由引理 3.6.1, 存在 $f_1\in C^\infty[0,l]$, 使得

$$\begin{aligned}&f_1(0)=a,\quad f_1'(0)=b,\quad f_1''(0)=0,\\&f_1(l)=f_2(l),\quad f_1'(l)=f_2'(l),\quad f_1''(l)=f_2''(l),\end{aligned}$$

令

$$h(x)=\begin{cases}f_1(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ f_2(x), & l<x<\infty\end{cases}$$

即可.

定理 3.6.3 设 M 是极限圆的, $\mathscr{D}\subset\mathscr{D}(T_1(M))$ 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓定义域的充分必要条件是存在二阶矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{N}$, 使得

(1) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{L}\ \ \boldsymbol{N})=2$;

(2) $\begin{vmatrix}l_{i1} & \overline{l_{j1}}\\ l_{i2} & \overline{l_{j2}}\end{vmatrix}=p(0)\begin{vmatrix}n_{i1} & \overline{n_{j1}}\\ n_{i2} & \overline{n_{j2}}\end{vmatrix},\quad i,j=1,2;$

(3) $\mathscr{D}=\left\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,\middle|\,\boldsymbol{L}\begin{pmatrix}f(0)\\ f'(0)\end{pmatrix}+\boldsymbol{N}\begin{pmatrix}[f,\varphi(\cdot,\lambda)](\infty)\\ [f,\theta(\cdot,\lambda)](\infty)\end{pmatrix}=0\right\}$, 这里 λ 是个实数.

证明　$\Rightarrow$　由 Calkin 抽象边条件描述, 存在 $h_1, h_2 \in \mathscr{D}(T_1(M))$, 使得 h_1, h_2 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关,

$$\langle h_i, h_j \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\mathscr{D} = \{ f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \,|\, \langle f, h_i \rangle = 0, i = 1, 2 \}.$$

因为

$$[f, g](x) = \begin{vmatrix} [f, \varphi(\cdot, \lambda)](x) & [f, \theta(\cdot, \lambda)](x) \\ [\overline{g}, \varphi(\cdot, \lambda)](x) & [\overline{g}, \theta(\cdot, \lambda)](x) \end{vmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} \langle f, h_i \rangle =& [f, h_i]_0^\infty \\ =& \left[\overline{h_i}, \theta(\cdot, \lambda)\right](\infty) [f, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) \\ & - \left[\overline{h_i}, \varphi(\cdot, \lambda)\right](\infty) [f, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) - p(0) \begin{vmatrix} f(0) & \overline{h_i}(0) \\ f'(0) & \overline{h_i'}(0) \end{vmatrix} \\ =& l_{i1} f(0) + l_{i2} f'(0) + n_{i1} [f, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) + n_{i2} [f, \theta(\cdot, \lambda)](\infty), \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} l_{i1} &= -p(0)\overline{h_i'(0)}, \quad l_{i2} = p(0)\overline{h_i(0)}, \\ n_{i1} &= \left[\overline{h_i}, \theta(\cdot, \lambda)\right](\infty), \quad n_{i2} = -\left[\overline{h_i}, \varphi(\cdot, \lambda)\right](\infty), \end{aligned} \qquad i = 1, 2.$$

记

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$\langle f, h_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{L} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} + \boldsymbol{N} \begin{pmatrix} [f, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) \\ [f, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) \end{pmatrix} = 0.$$

而 $\langle h_j, h_i \rangle = 0$, 即

$$l_{i1} h_j(0) + l_{i2} h_j'(0) + n_{i1} [h_j, \varphi(\cdot, \lambda)](\infty) + n_{i2} [h_j, \theta(\cdot, \lambda)](\infty) = 0$$

或

$$\frac{l_{i1}\overline{l_{j2}}}{p(0)} - \frac{l_{i2}\overline{l_{j1}}}{p(0)} - n_{i1}\overline{n_{j2}} + n_{i2}\overline{n_{j1}} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} l_{i1} & \overline{l_{j1}} \\ l_{i2} & \overline{l_{j2}} \end{vmatrix} = p(0) \begin{vmatrix} n_{i1} & \overline{n_{j1}} \\ n_{i2} & \overline{n_{j2}} \end{vmatrix},$$

如果 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{L} \;\; \boldsymbol{N}) \leqslant 1$, 则

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} -p(0)\overline{h_1'(0)} & p(0)\overline{h_1(0)} & \left[\overline{h_1}, \theta(\cdot, \lambda)\right](\infty) & -\left[\overline{h_1}, \varphi(\cdot, \lambda)\right](\infty) \\ -p(0)\overline{h_2'(0)} & p(0)\overline{h_2(0)} & \left[\overline{h_2}, \theta(\cdot, \lambda)\right](\infty) & -\left[\overline{h_2}, \varphi(\cdot, \lambda)\right](\infty) \end{pmatrix} \leqslant 1.$$

于是

$$\overline{h_2'(0)} = c\overline{h_1'(0)}, \quad \overline{h_2(0)} = c\overline{h_1(0)},$$
$$\left[\overline{h_2}, \theta(\cdot,\lambda)\right](\infty) = c\left[\overline{h_1}, \theta(\cdot,\lambda)\right](\infty), \quad \left[\overline{h_2}, \varphi(\cdot,\lambda)\right](\infty) = c\left[\overline{h_1}, \varphi(\cdot,\lambda)\right](\infty),$$

即

$$\left(\overline{h_2} - c\overline{h_1}\right)(0) = 0, \quad \left(\overline{h_2} - c\overline{h_1}\right)'(0) = 0,$$
$$\left[\overline{h_2} - c\overline{h_1}, \varphi(\cdot,\lambda)\right](\infty) = 0, \quad \left[\overline{h_2} - c\overline{h_1}, \theta(\cdot,\lambda)\right](\infty) = 0.$$

对任意的 $f \in \mathscr{D}(T_1(M))$, 因为

$$\left[\overline{h_2} - c\overline{h_1}, f\right](\infty) = \begin{vmatrix} \left[\overline{h_2} - c\overline{h_1}, \varphi(\cdot,\lambda)\right](\infty) & \left[\overline{h_2} - c\overline{h_1}, \theta(\cdot,\lambda)\right](\infty) \\ \left[\overline{f}, \varphi(\cdot,\lambda)\right](\infty) & \left[\overline{f}, \theta(\cdot,\lambda)\right](\infty) \end{vmatrix} = 0,$$

从而

$$\left\langle \overline{h_2} - c\overline{h_1}, f \right\rangle = \left[\overline{h_2} - c\overline{h_1}, f\right]_0^\infty = 0,$$

所以

$$\overline{h_2} - c\overline{h_1} \in \mathscr{D}\left(T_0\left(M\right)\right).$$

与 h_1, h_2 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关矛盾!

$\Leftarrow$ 由引理 3.6.3, 在 $\mathscr{D}(T_1(M))$ 中存在 h_1, h_2, 使得

$$h_i(0) = \frac{\overline{l_{i2}}}{p(0)}, \quad h_i'(0) = -\frac{\overline{l_{i1}}}{p(0)},$$
$$\left[h_i, \varphi(\cdot,\lambda)\right](\infty) = -\overline{n_{i2}}, \quad \left[h_i, \theta(\cdot,\lambda)\right](\infty) = \overline{n_{i1}},$$

那么

$$f \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \langle f, h_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2,$$

由条件 (2)

$$\langle h_i, h_j \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

h_1, h_2 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关. 否则, 不妨设

$$h_1 + \beta h_2 \in \mathscr{D}(T_0(M)),$$

则

$$h_1(0) + \beta h_2(0) = 0, \quad h_1'(0) + \beta h_2'(0) = 0,$$

所以

$$\left[h_1 + \beta h_2, \varphi(\cdot,\lambda)\right](\infty) = 0, \quad \left[h_1 + \beta h_2, \theta(\cdot,\lambda)\right](\infty) = 0,$$

即

$$\frac{\overline{l_{12}}}{p(0)} = -\beta\frac{\overline{l_{22}}}{p(0)}, \quad -\frac{\overline{l_{11}}}{p(0)} = \beta\frac{\overline{l_{21}}}{p(0)},$$

$$-\overline{n_{12}} = \beta\overline{n_{22}}, \quad \overline{n_{11}} = -\beta\overline{n_{21}},$$

$$(l_{11}, \ l_{12}, \ n_{11}, \ n_{12}) = -\overline{\beta}(l_{21}, \ l_{22}, \ n_{21}, \ n_{22}),$$

与 $\operatorname{rank}(L \quad N) = 2$ 矛盾!

推论 3.6.2　Weyl-Titchmarsh 自伴延拓 T 是特例.

证明　设

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \,|\sin\alpha f(0) - \cos\alpha p(0) f'(0) = 0, [f,\psi](\infty) = 0\},$$

$$\psi(x,\mu) = \varphi(x,\mu) + M(\mu, \widehat{m}_\infty(\lambda_0))\theta(x,\mu), \quad \mathrm{Im}\lambda_0 \neq 0, \quad \mathrm{Im}\mu \neq 0.$$

由于

$$[f,\psi](x) = \begin{vmatrix} [f,\varphi(\cdot,\lambda)](x) & [f,\theta(\cdot,\lambda)](x) \\ [\overline{\psi},\varphi(\cdot,\lambda)](x) & [\overline{\psi},\theta(\cdot,\lambda)](x) \end{vmatrix},$$

令

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha p(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [\overline{\psi}(\cdot,\mu),\theta(\cdot,\lambda)](\infty) & -[\overline{\psi}(\cdot,\mu),\varphi(\cdot,\lambda)](\infty) \end{pmatrix},$$

(1) $[\psi(\cdot,\overline{\mu}),\varphi(\cdot,\lambda)](\infty), [\psi(\cdot,\overline{\mu}),\theta(\cdot,\lambda)](\infty)$ 不同时为零, 所以 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{L} \quad \boldsymbol{N}) = 2$. 否则由前面的行列式可得

$$[f,\psi(\cdot,\mu)](\infty) = 0, \quad \forall f \in \mathscr{D}(T_1(M)).$$

设 $\{\lambda_n \,|n = 1,2,\cdots\}$ 是 T 的特征值, 取 $v \neq \lambda_n, n = 1,2,\cdots$ 且 $\mathrm{Im}v = 0$. 以 f 记 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My = vy, \\ y(0) = \cos\alpha, \\ p(0)y'(0) = \sin\alpha \end{cases}$$

的解, 则由于 M 是极限圆的, 所以 $f \in \mathscr{D}(T_1(M))$. 可是 v 不是特征值, 故

$$[f,\psi(\cdot,\mu)](\infty) \neq 0,$$

矛盾!

(2) 显然 $\begin{vmatrix} l_{i1} & \overline{l_{j1}} \\ l_{i2} & \overline{l_{j2}} \end{vmatrix} = p(0)\begin{vmatrix} n_{i1} & \overline{n_{j1}} \\ n_{i2} & \overline{n_{j2}} \end{vmatrix}, \quad i,j = 1,2.$

3.7 谱函数的存在性

为了得到奇型 Sturm-Liouville 微分算子的特征展开, 考虑它限制在有穷区间 $[0,b]$ 上的特征展开, 然后让区间 $[0,b]\to[0,\infty)$, 希望能由此得到 $[0,\infty)$ 上的展开.

$$M=-DpD+q,\quad x\in[0,\infty),$$

$$M_b=M|_{[0,b]}.$$

设 T_b 是 $T_0(M_b)$ 的自伴延拓,

$$\mathscr{D}(T_b)=\left\{f\in\mathscr{D}(T_1(M_b))\,\middle|\,\begin{aligned}\sin\alpha f(0)-\cos\alpha p(0)f'(0)=0,\\ \cos\beta f(b)+\sin\beta p(b)f'(b)=0\end{aligned}\right\},$$

设 $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\theta(x,\lambda)$ 分别是 $My=\lambda y$ 满足初始条件

$$\begin{cases}\varphi(0,\lambda)=\sin\alpha,\\ p(0)\varphi'(0,\lambda)=-\cos\alpha,\end{cases}\qquad\begin{cases}\theta(0,\lambda)=\cos\alpha,\\ p(0)\theta'(0,\lambda)=\sin\alpha\end{cases}$$

的解. Weyl 解 $\psi_b(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+m_b(\lambda)\theta(x,\lambda)$ 满足边界条件

$$\sin\alpha\psi_b(0,\lambda)-\cos\alpha p(0)\psi_b'(0,\lambda)=1,$$

$$\cos\beta\psi_b(b,\lambda)+\sin\beta p(b)\psi_b'(b,\lambda)=0.$$

设 $\{\lambda_{bn}\}$ 是 T_b 的特征值, $|\lambda_{b1}|<|\lambda_{b2}|<\cdots\to\infty$, $\{\theta_{b_n}\}$ 是对应的规范化特征函数, 因为任何与 θ 线性无关的解都不可能满足 $\mathscr{D}(T_b)$ 里 0 点的边界条件, 故

$$\theta_{bn}(x)=r_{bn}\theta(x,\lambda_{bn}),\quad n=1,2,\cdots.$$

由于 $\theta(x,\overline{\lambda})=\overline{\theta(x,\lambda)}$, 所以 $\theta_{bn}(x)$ 是实的.

注 θ_{bn} 满足点 b 的边界条件, 所以

$$\cos\beta\theta(b,\lambda_{bn})+\sin\beta p(b)\theta'(b,\lambda_{bn})=0,$$

即 λ_{bn} 是整函数 $\omega(\lambda)=\cos\beta\theta(b,\lambda)+\sin\beta p(b)\theta'(b,\lambda)$ 的零点或 Weyl 函数 $m_b(\lambda)$ 的极点.

特征展开: 对任意的 $f\in L^2[0,b]$, 有

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,r_{bn}\theta(\cdot,\lambda_{bn}))r_{bn}\theta(\cdot,\lambda_{bn})$$

和 Parseval 等式

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, r_{bn}\theta(\cdot, \lambda_{bn}))|^2.$$

将它们改写如下:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \theta(\cdot, \lambda_{bn}))\theta(\cdot, \lambda_{bn}) r_{bn}^2,$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \theta(\cdot, \lambda_{bn}))|^2 r_{bn}^2.$$

作非降函数 $\rho_b(\lambda)$, 使得它是满足下述条件的阶梯函数:

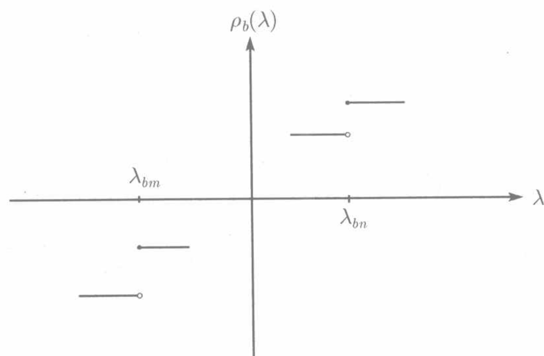


图 3.4

$$\rho_b(0) = 0,$$
$$\rho_b(\lambda + 0) = \rho_b(\lambda),$$
$$\rho_b(\lambda_{bn}) - \rho_b(\lambda_{bn} - 0) = r_{bn}^2.$$

令

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_0^b f(x)\theta(x, \lambda)\mathrm{d}x,$$

则

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(\lambda_{bn})\theta(\cdot, \lambda_{bn}) r_{bn}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)\theta(\cdot, \lambda)\mathrm{d}\rho_b(\lambda),$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\widehat{f}(\lambda_{bn})\right|^2 r_{bn}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho_b(\lambda).$$

称 $\widehat{f}(\lambda)$ 为 $f(x)$ 的广义 Fourier 变换. 引进空间

$$L^2_{\rho_b}(-\infty, +\infty) = \left\{ g \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 \mathrm{d}\rho_b(\lambda) < \infty \right. \right\},$$

则上面的结果表明

$$f \in L^2[0,b] \xrightarrow{U} \widehat{f} = \int_0^b f(x)\theta(x,\cdot)\,\mathrm{d}x \in L^2_{\rho_b}(-\infty,+\infty)$$

是一个等距线性算子.

把 Parseval 等式写成积分形式, 称 $\rho_b(\lambda)$ 为 T_b 的谱函数, 它与 Weyl 函数 $m_b(\lambda)$ 有下述关系:

引理 3.7.1 (Levinson) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho_b(\lambda)}{|\mu-\lambda|^2} = \frac{\mathrm{Im}m_b(\mu)}{\mathrm{Im}\mu}, \mathrm{Im}\mu \neq 0.$

证明 因为 Weyl 解 $\psi_b(x,\mu) = \varphi(x,\mu) + m_b(\mu)\theta(x,\mu)$ $(m_b(\mu) \in C_b(\mu))$ 满足

$$\int_0^b |\psi_b(x,\mu)|^2 \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Im}m_b(\mu)}{\mathrm{Im}\mu}, \quad \mathrm{Im}\mu \neq 0,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\psi}_b(\lambda,\mu)\right|^2 \mathrm{d}\rho_b(\lambda) = \frac{\mathrm{Im}m_b(\mu)}{\mathrm{Im}\mu}, \quad \mathrm{Im}\mu \neq 0,$$

其中,

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}_b(\lambda,\mu) &= \int_0^b \psi_b(x,\mu)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x = \int_0^b \psi_b(x,\mu)\overline{\theta(x,\lambda)}\mathrm{d}x \quad (\lambda \text{ 是实的!}) \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda}\int_0^b (\overline{\theta(x,\lambda)}M\psi_b(x,\mu) - \psi_b(x,\mu)\overline{M\theta(x,\lambda)})\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda}[\psi_b(\cdot,\mu),\theta(\cdot,\lambda)]_0^b.
\end{aligned}$$

特别地, 由于 $\psi_b(x,\mu)$ 和 $\theta(x,\lambda_{bn})$ 在点 b 满足同一个边界条件, 故

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}_b(\lambda_{bn},\mu) &= \frac{1}{\mu-\lambda_{bn}}[\psi_b(\cdot,\mu),\theta(\cdot,\lambda_{bn})]_0^b \\
&= -\frac{1}{\mu-\lambda_{bn}}[\psi_b(\cdot,\mu),\theta(\cdot,\lambda_{bn})](0) \\
&= -\frac{1}{\mu-\lambda_{bn}}\begin{vmatrix} \sin\alpha + m_b(\mu)\cos\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha + m_b(\mu)\sin\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{\mu-\lambda_{bn}},
\end{aligned}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\psi}_b(\lambda,\mu)\right|^2 \mathrm{d}\rho_b(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} r_{bn}^2 \left|\frac{1}{\mu-\lambda_{bn}}\right|^2,$$

所以 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\rho_b(\lambda)}{|\mu-\lambda|^2} = \frac{\mathrm{Im}m_b(\mu)}{\mathrm{Im}\mu}, \mathrm{Im}\mu \neq 0.$

定理 3.7.1 (Helly 选择定理)　设 (1) $\{h_n\}$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上实的非降函数所组成的序列;

(2) H 是 $(-\infty,\infty)$ 上的非负函数;

(3) $|h_n(x)| \leqslant H(x),\quad n=1,2,\cdots,\quad -\infty<x<\infty$;

则存在子序列 $\{h_{n_k}\}$ 和非降函数 $\widetilde{h}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x) = \widetilde{h}(x),\quad -\infty<x<\infty,$$

$$\left|\widetilde{h}(x)\right| \leqslant H(x),\quad -\infty<x<\infty.$$

证明　(1) 由 Bolzano-Weierstrass 定理和 Cantor 对角线方法可以选出 $\{h_n\}$ 的一个子列, 使得该子列在一切有理点均收敛. 不妨假定这个子列就是 $\{h_n\}$ 本身. 令

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots.$$

为有理点集, 则

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x_j) = C_j,\quad j=1,2,\cdots.$$

因为 $x_j < x_l$,

$$h_n(x_j) \leqslant h_n(x_l),\quad n=1,2,\cdots,$$

所以

$$C_j \leqslant C_l.$$

(2) 令 $h(x) = \inf\limits_{x_j \geqslant x} C_j$, 当 $x' \leqslant x''$ 时, 因为

$$\{C_j \mid x_j > x'\} \supset \{C_j \mid \ x_j > x''\},$$

所以 $h(x') \leqslant h(x'')$, h 非降.

(3) $h(x+0) = h(x)$, 右连续

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_{j0} > x$, 使得

$$h(x) > C_{j0} - \varepsilon.$$

这样当 $x < x' < x_{j0}$ 时, 有

$$h(x) > C_{j0} - \varepsilon \geqslant h(x') - \varepsilon,$$

即

$$h(x') - h(x) < \varepsilon,\quad x < x' < x_{j0},$$

所以

$$\lim_{x'\to x+0} h(x') = h(x).$$

(4) 如果 x 是 $h(x)$ 的连续点, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 由连续性, 存在有理点 x_j 和 x_l, 使得 $x_j < x < x_l$, 而

$$h(x_l) - h(x_j) < \frac{\varepsilon}{2},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x_j) = h(x_j)$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x_l) = h(x_l)$, 存在 n_0, 当 $n \geqslant n_0$ 时,

$$|h_n(x_j) - h(x_j)| < \varepsilon/2, \quad |h_n(x_l) - h(x_l)| < \varepsilon/2.$$

于是

$$\begin{aligned} h(x) - \varepsilon \leqslant h(x_l) - \varepsilon < h(x_j) - \varepsilon/2 < h_n(x_j) \\ \leqslant h_n(x_l) < h(x_l) + \varepsilon/2 < h(x_j) + \varepsilon \leqslant h(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

这样当 $n \geqslant n_0$ 时, 便有

$$h(x) - \varepsilon < h_n(x_j) \leqslant h_n(x) \leqslant h_n(x_l) < h(x) + \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x).$$

所以使 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) \neq h(x)$ 的点至多可数, 设为 $\{x'_j | j \in J\}$, J 至多可数.

(5) 因为 $|h_n(x)| \leqslant H(x)$, 利用 (1), 可以选出 $\{h_n\}$ 的一个子列 $\{h_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x'_j) \text{存在}, \quad j \in J.$$

令

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x \neq x'_j,\ j \in J, \\ \lim\limits_{k\to\infty} h_{n_k}(x'_j), & x = x'_j, \end{cases}$$

则

$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x) = \widetilde{h}(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

$\widetilde{h}(x)$ 当然是非降的且 $\left|\widetilde{h}(x)\right| \leqslant H(x)$.

定理 3.7.2 (谱函数的存在性, B. M. Levitan, N. Levinson, 1949) 存在 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ 和非降函数 $\rho(\lambda)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{b_n} = \rho(\lambda)$.

证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho_b(\lambda)}{|\mu - \lambda|^2} = \frac{\mathrm{Im} m_b(\mu)}{\mathrm{Im}\mu}, \quad \mathrm{Im}\mu \neq 0.$$

对 $\mu = \mathrm{i}$, 由于 $b > 1$ 时, $C_b(\mathrm{i}) \subset C_1(\mathrm{i})$ 及其内部, 故

$$m_b(\mathrm{i}) \in C_b(\mathrm{i}) \subset C_1(\mathrm{i}) \text{ 及其内部},$$

所以

$$|m_b(\mathrm{i})| < K, \quad b \geqslant 1,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho_b(\lambda)}{1+\lambda^2}\right| = |\mathrm{Im} m_b(\mathrm{i})| \leqslant |m_b(\mathrm{i})| < K, \quad b \geqslant 1,$$

对任意的 $\nu > 0$,

$$\int_0^{\nu} \frac{\mathrm{d}\rho_b(\lambda)}{1+\nu^2} \leqslant \int_0^{\nu} \frac{\mathrm{d}\rho_b(\lambda)}{1+\lambda^2} < K,$$

$$\rho_b(\nu) - \rho_b(0) < K(1+\nu^2), \quad \rho_b(\nu) < K(1+\nu^2),$$

对 $\nu < 0$,

$$\int_{\nu}^{0} \frac{\mathrm{d}\rho_b(\lambda)}{1+\nu^2} \leqslant \int_{\nu}^{0} \frac{\mathrm{d}\rho_b(\lambda)}{1+\lambda^2} < K,$$

$$\rho_b(0) - \rho_b(\nu) < K(1+\nu^2), \quad |\rho_b(\nu)| < K(1+\nu^2),$$

所以

$$|\rho_b(\lambda)| < K(1+\lambda^2), \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

由 Helly 选择定理, 存在子列 $\{b_n\}$ 和非降函数 $\rho(\lambda)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{b_n}(\lambda) = \rho(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

定理 3.7.3 (Helly 积分定理, 有限区间)　设 (1) $\{\rho_n(\sigma)\}$ 是 $[a, b]$ 上的单调函数序列,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(\sigma) = \rho(\sigma);$$

(2) $\varphi \in C[a, b]$;

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho_n(\sigma) = \int_a^b \varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho(\sigma).$$

证明　因为 $\varphi(\sigma)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|\sigma' - \sigma''| < \delta$ 时 $|\varphi(\sigma') - \varphi(\sigma'')| < \varepsilon$. 作 $[a, b]$ 的分割 $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_m = b$, 使得 $|\sigma_k - \sigma_{k-1}| < \delta$, 任取 $\xi_k \in [\sigma_{k-1}, \sigma_k]$, 有

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b \varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho_n(\sigma)-\sum_{k=1}^m \varphi(\xi_k)(\rho_n(\sigma_k)-\rho_n(\sigma_{k-1}))\right|\\=&\left|\sum_{k=1}^m\int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho_n(\sigma)-\sum_{k=1}^m\int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k}\varphi(\xi_k)\mathrm{d}\rho_n(\sigma)\right|\\\leqslant&\sum_{k=1}^m\int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k}|\varphi(\sigma)-\varphi(\xi_k)|\,\mathrm{d}\rho_n(\sigma)\\\leqslant&\varepsilon\int_a^b\mathrm{d}\rho_n(\sigma)=\varepsilon(\rho_n(b)-\rho_n(a))<2M\varepsilon.\end{aligned}$$

同样地

$$\left|\int_a^b \varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho(\sigma)-\sum_{k=1}^m \varphi(\xi_k)(\rho(\sigma_k)-\rho(\sigma_{k-1}))\right|<2M\varepsilon.$$

可是

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n(\sigma_k)=\rho(\sigma_k),\quad k=0,1,\cdots,m,$$

所以可以取到 N, 使 $n\geqslant N$ 时,

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^m \varphi(\xi_k)(\rho_n(\sigma_k)-\rho_n(\sigma_{k-1}))-\sum_{k=1}^m \varphi(\xi_k)(\rho(\sigma_k)-\rho(\sigma_{k-1}))\right|\\\leqslant&\sum_{k=1}^m|\varphi(\xi_k)|\left(|\rho_n(\sigma_k)-\rho(\sigma_k)|+|\rho_n(\sigma_{k-1})-\rho(\sigma_{k-1})|\right)<\varepsilon,\end{aligned}$$

这样当 $n\geqslant N$ 时便有

$$\left|\int_a^b \varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho_n(\sigma)-\int_a^b \varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho(\sigma)\right|<(4M+1)\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho_n(\sigma)=\int_a^b \varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho(\sigma).$$

定理 3.7.4 (Helly 积分定理, 无穷区间) 设 (1) $\{\rho_n(\sigma)\}$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的单调函数所组成的序列且

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n(\sigma)=\rho(\sigma);$$

(2) $\varphi\in C(-\infty,\infty)$;

(3) 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 使得当 $a,b>A$ 时,

$$\int_{-\infty}^{-a}|\varphi(\sigma)|\,\mathrm{d}\rho_n(\sigma),\quad \int_b^{\infty}|\varphi(\sigma)|\,\mathrm{d}\rho_n(\sigma)<\varepsilon,\quad n=1,2,\cdots;$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho_n(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho(\sigma).$$

证明　(1) $\varphi\in L_\rho(-\infty,\infty)$, 因而 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho(\sigma)$ 有意义.

设 $a,b>A$, 任取 $b'>b$, 则有

$$\int_b^{b'}|\varphi(\sigma)|\mathrm{d}\rho_n(\sigma)<\varepsilon.$$

由有限区间的 Helly 积分定理, 有

$$\int_b^{b'}|\varphi(\sigma)|\mathrm{d}\rho(\sigma)\leqslant\varepsilon.$$

因为 b' 任意, 所以

$$\int_b^{\infty}|\varphi(\sigma)|\mathrm{d}\rho(\sigma)\leqslant\varepsilon.$$

同理,

$$\int_{-\infty}^{-a}|\varphi(\sigma)|\mathrm{d}\rho(\sigma)\leqslant\varepsilon,$$

所以

$$\varphi\in L_\rho(-\infty,\infty).$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho_n(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho(\sigma).$

当 $a,b>A$ 时,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{-\infty}^{-a}|\varphi(\sigma)|\,\mathrm{d}\rho_n(\sigma)\leqslant\varepsilon,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_b^{\infty}|\varphi(\sigma)|\mathrm{d}\rho_n(\sigma)\leqslant\varepsilon.$$

这样便得

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho_n(\sigma)-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho(\sigma)\right|\\ \leqslant&\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{-a}^{b}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho_n(\sigma)-\int_{-a}^{b}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho(\sigma)\right|\\ &+\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_{-\infty}^{-a}|\varphi(\sigma)|\,\mathrm{d}\rho_n(\sigma)+\int_b^{\infty}|\varphi(\sigma)|\mathrm{d}\rho_n(\sigma)\right)\\ &+\int_{-\infty}^{-a}|\varphi(\sigma)|\,\mathrm{d}\rho(\sigma)+\int_b^{\infty}|\varphi(\sigma)|\mathrm{d}\rho(\sigma)\leqslant4\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho_n(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\rho(\sigma).$

给出谱函数与 Weyl 函数的关系 ——Titchmarsh 公式.

定理 3.7.5 设 $M(\lambda)$ 是 Weyl 函数 (极限点或极限圆情形) , ξ,η 是 ρ 的连续点, 则

$$\rho(\eta)-\rho(\xi)=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{\xi}^{\eta}\mathrm{Im}M(\varepsilon+\mathrm{i}\delta)\mathrm{d}\varepsilon.$$

而在极限点情形还有反演公式

$$M(\lambda)-M(\lambda_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma-\lambda}-\frac{1}{\sigma-\lambda_0}\right)\mathrm{d}\rho(\sigma)+c(\lambda-\lambda_0),\quad \mathrm{Im}\lambda,\mathrm{Im}\lambda_0\neq 0.$$

证明 (1) 对于 ρ 的连续点 ξ,η,

$$\rho(\eta)-\rho(\xi)=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{\xi}^{\eta}\mathrm{Im}M(\varepsilon+\mathrm{i}\delta)\mathrm{d}\varepsilon.$$

对于任意的 λ, 若 $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_b(\sigma)}{|\lambda-\sigma|^2}=\frac{\mathrm{Im}m_b(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda}.$$

当 $b\geqslant 1$ 时, $C_b(\mathrm{i})\subset C_1(\mathrm{i})$ 及其内部, 所以

$$|\mathrm{Im}m_b(\mathrm{i})|\leqslant|m_b(\mathrm{i})|\leqslant K,\quad b\geqslant 1.$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_b(\sigma)}{|\mathrm{i}-\sigma|^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_b(\sigma)}{1+\sigma^2}=\mathrm{Im}m_b(\mathrm{i})\leqslant|m_b(\mathrm{i})|\leqslant K,\quad b\geqslant 1.$$

考虑 $\mathrm{Im}\lambda,\mathrm{Im}\lambda_0\neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\sigma-\lambda|^2}-\frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2}&=\frac{(\sigma-\lambda_0)(\sigma-\overline{\lambda_0})-(\sigma-\lambda)(\sigma-\overline{\lambda})}{|\sigma-\lambda|^2|\sigma-\lambda_0|^2}\\&=\frac{-\lambda_0\sigma-\overline{\lambda_0}\sigma+|\lambda_0|^2+\lambda\sigma+\overline{\lambda}\sigma-|\lambda|^2}{|\sigma-\lambda|^2|\sigma-\lambda_0|^2}\\&=\frac{\sigma(\lambda-\lambda_0)+\sigma(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)+|\lambda_0|^2-|\lambda|^2}{|\sigma-\lambda|^2|\sigma-\lambda_0|^2}\\&=O\left(\frac{1}{|\sigma|^3}\right),\quad |\sigma|\to\infty.\end{aligned}$$

下面对任意的 $A>0$ 和 $a,b>A$, 来估计 $\int_{-\infty}^{-a}\frac{\mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3}$ 和 $\int_{b}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3}$.

$$\int_{b}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3}=\int_{b}^{\infty}\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1+\sigma^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma)}{1+\sigma^2}\leqslant\frac{2}{b}\int_{b}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma)}{1+\sigma^2}\leqslant\frac{2}{A}K,\quad b_n\geqslant 1,$$

$$\int_{-\infty}^{-a} \frac{\mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3} = \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{|\sigma|} \cdot \frac{1+\sigma^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma)}{1+\sigma^2} \leqslant \frac{2}{a} \int_{-\infty}^{-a} \frac{\mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma)}{1+\sigma^2} \leqslant \frac{2}{A}K, \quad b_n \geqslant 1,$$

所以对任给的 $\varepsilon > 0$, 只要 A 充分大, 当 $a, b > A$ 时, 便有

$$\int_b^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3}, \quad \int_{-\infty}^{-a} \frac{\mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma)}{|\sigma|^3} < \varepsilon, \quad b_n \geqslant 1.$$

这样对任给的 $\varepsilon > 0$, 便存在 $A > 0$, 当 $a, b > A$ 时, 有

$$\int_b^{\infty} \left(\frac{1}{|\sigma-\lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2} \right) \mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma), \quad \int_{-\infty}^{-a} \left(\frac{1}{|\sigma-\lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2} \right) \mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma) < \varepsilon.$$

利用 Helly 积分定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\sigma-\lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2} \right) \mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\sigma-\lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2} \right) \mathrm{d}\rho(\sigma).$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\sigma-\lambda|^2} - \frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2} \right) \mathrm{d}\rho_{b_n}(\sigma) = \frac{\mathrm{Im} m_{b_n}(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda} - \frac{\mathrm{Im} m_{b_n}(\lambda_0)}{\mathrm{Im}\lambda_0},$$

当 $n \to \infty$ 时, 右边的极限是

$$\frac{\mathrm{Im}M(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda} - \frac{\mathrm{Im}M(\lambda_0)}{\mathrm{Im}\lambda_0},$$

所以把涉及 λ_0 的部分看成常数可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho(\sigma)}{|\sigma-\lambda|^2} + c = \frac{\mathrm{Im}M(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda}, \quad \mathrm{Im}\lambda \neq 0, \quad c \text{ 是与 } \lambda \text{ 无关的常数}.$$

取 $\lambda = \varepsilon + \mathrm{i}\delta$, 得

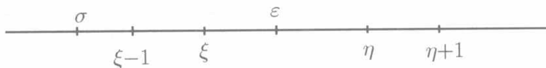


图 3.5

$$\mathrm{Im}M(\varepsilon+\mathrm{i}\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta \mathrm{d}\rho(\sigma)}{(\sigma-\varepsilon)^2+\delta^2} + c\delta,$$

$$\int_{\xi}^{\eta} \mathrm{Im}M(\varepsilon+\mathrm{i}\delta)\mathrm{d}\varepsilon = \delta \int_{\xi}^{\eta} \mathrm{d}\varepsilon \left(\int_{-\infty}^{\xi-1} + \int_{\xi-1}^{\eta+1} + \int_{\eta+1}^{\infty} \right) \frac{\mathrm{d}\rho(\sigma)}{(\sigma-\varepsilon)^2+\delta^2} + c\delta(\eta-\xi),$$

$$\int_{-\infty}^{\xi-1} \frac{\mathrm{d}\rho(\sigma)}{(\sigma-\varepsilon)^2+\delta^2} \leqslant \int_{-\infty}^{\xi-1} \frac{\mathrm{d}\rho(\sigma)}{(\sigma-\varepsilon)^2}.$$

因为

$$\lim_{\sigma\to-\infty}\frac{1+\sigma^2}{(\sigma-\varepsilon)^2}=1,$$

所以, 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho(\sigma)}{1+\sigma^2}$ 存在知

$$\int_{-\infty}^{\xi-1}\frac{\mathrm{d}\rho(\sigma)}{(\sigma-\varepsilon)^2}=O(1).$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\xi-1}\frac{\mathrm{d}\rho(\sigma)}{(\sigma-\varepsilon)^2+\delta^2}=O(1).$$

同理

$$\int_{\eta+1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho(\sigma)}{(\sigma-\varepsilon)^2+\delta^2}=O(1).$$

这样便只需要考虑

$$\lim_{\delta\to+0}\delta\int_{\xi}^{\eta}\mathrm{d}\varepsilon\int_{\xi-1}^{\eta+1}\frac{\mathrm{d}\rho(\sigma)}{(\sigma-\varepsilon)^2+\delta^2}.$$

$\dfrac{\delta}{(\sigma-\varepsilon)^2+\delta^2}$ 是正函数, 而

$$\int_{\xi-1}^{\eta+1}\mathrm{d}\rho(\sigma)\int_{\xi}^{\eta}\frac{\delta\mathrm{d}\varepsilon}{(\sigma-\varepsilon)^2+\delta^2}=\int_{\xi-1}^{\eta+1}\arctan\frac{\varepsilon-\sigma}{\delta}\bigg|_{\xi}^{\eta}\mathrm{d}\rho(\sigma)\text{存在},$$

故由 Fubini 定理, 积分号可以交换,

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\xi}^{\eta}\mathrm{d}\varepsilon\int_{\xi-1}^{\eta+1}\frac{\delta\mathrm{d}\rho(\sigma)}{(\sigma-\varepsilon)^2+\delta^2}=\lim_{\delta\to+0}\int_{\xi-1}^{\eta+1}\left(\arctan\frac{\eta-\sigma}{\delta}-\arctan\frac{\xi-\sigma}{\delta}\right)\mathrm{d}\rho(\sigma).\tag{3.1}$$

可是

$$\left|\arctan\frac{\eta-\sigma}{\delta}-\arctan\frac{\xi-\sigma}{\delta}\right|\leqslant\pi,$$

而 $\pi\in L_\rho[\xi-1,\eta+1]$, 这样由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}(3.1)&=\int_{\xi-1}^{\eta+1}\lim_{\delta\to+0}\left(\arctan\frac{\eta-\sigma}{\delta}-\arctan\frac{\xi-\sigma}{\delta}\right)\mathrm{d}\rho(\sigma)\\&=\int_{\xi-1}^{\eta+1}\begin{cases}0, & \xi-1\leqslant\sigma<\xi,\eta<\sigma\leqslant\eta+1,\\ \dfrac{\pi}{2}, & \sigma=\xi,\eta,\\ \pi, & \xi<\sigma<\eta\end{cases}\mathrm{d}\rho(\sigma)\\&=\frac{\pi}{2}(\rho(\xi)-\rho(\xi-0)+\rho(\eta)-\rho(\eta-0))+\pi(\rho(\eta-0)-\rho(\xi+0)),\end{aligned}$$

当 ξ,η 是 ρ 的连续点时,

$$\text{上式} = \pi(\rho(\eta)-\rho(\xi)).$$

(2) 在极限点情形.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho(\sigma)}{|\sigma-\lambda|^2}+c=\frac{\mathrm{Im}M(\lambda)}{\mathrm{Im}\lambda},\quad \mathrm{Im}\lambda\neq 0,$$

因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sigma-\lambda}-\frac{1}{\sigma-\lambda_0}\right)&=\frac{\mathrm{Im}\lambda}{|\sigma-\lambda|^2}-\frac{\mathrm{Im}\ \lambda_0}{|\sigma-\lambda_0|^2}\\&=\frac{\mathrm{Im}\ \lambda}{|\sigma-\lambda|^2}-\frac{\mathrm{Im}\ \lambda}{|\sigma-\lambda_0|^2}+\frac{\mathrm{Im}\lambda}{|\sigma-\lambda_0|^2}-\frac{\mathrm{Im}\lambda_0}{|\sigma-\lambda_0|^2}\\&=\mathrm{Im}\ \lambda\left(\frac{1}{|\sigma-\lambda|^2}-\frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2}\right)+\mathrm{Im}\ (\lambda-\lambda_0)\frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2},\end{aligned}$$

从而

$$\mathrm{Im}\ \lambda\left(\frac{1}{|\sigma-\lambda|^2}-\frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2}\right)=\mathrm{Im}\ \left(\frac{1}{\sigma-\lambda}-\frac{1}{\sigma-\lambda_0}\right)-\mathrm{Im}\ (\lambda-\lambda_0)\frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2}. \tag{3.2}$$

又由

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{|\sigma-\lambda|^2}-\frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2}\right)\mathrm{d}\rho(\sigma)=\frac{\mathrm{Im}M(\lambda)}{\mathrm{Im}\ \lambda}-\frac{\mathrm{Im}M(\lambda_0)}{\mathrm{Im}\ \lambda_0}$$

得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\ \lambda\left(\frac{1}{|\sigma-\lambda|^2}-\frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2}\right)\mathrm{d}\rho(\sigma)=\mathrm{Im}M(\lambda)-\ \mathrm{Im}\ \lambda\frac{\mathrm{Im}M(\lambda_0)}{\mathrm{Im}\ \lambda_0},$$

把 (3.2) 代入上式得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sigma-\lambda}-\frac{1}{\sigma-\lambda_0}\right)\mathrm{d}\rho(\sigma)-\mathrm{Im}(\lambda-\lambda_0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\sigma-\lambda_0|^2}\mathrm{d}\rho(\sigma)\\=&\mathrm{Im}M(\lambda)-\mathrm{Im}M(\lambda_0)+\left(1-\frac{\mathrm{Im}\ \lambda}{\mathrm{Im}\lambda_0}\right)\ \mathrm{Im}\ M(\lambda_0)\\=&\mathrm{Im}\,(M(\lambda)-M(\lambda_0))-\mathrm{Im}(\lambda-\lambda_0)\frac{\mathrm{Im}\ M(\lambda_0)}{\mathrm{Im}\ \lambda_0},\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\ (M(\lambda)-M(\lambda_0))&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\ \left(\frac{1}{\sigma-\lambda}-\frac{1}{\sigma-\lambda_0}\right)\mathrm{d}\rho(\sigma)-c\ \mathrm{Im}\ (\lambda-\lambda_0)\\&=\mathrm{Im}\ \left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma-\lambda}-\frac{1}{\sigma-\lambda_0}\right)\mathrm{d}\rho(\sigma)-c(\lambda-\lambda_0)\right],\end{aligned}$$

故

$$M(\lambda)-M(\lambda_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma-\lambda}-\frac{1}{\sigma-\lambda_0}\right)\mathrm{d}\rho(\sigma)-c(\lambda-\lambda_0)+c',$$

令 $\lambda=\lambda_0$ 得 $c'=0$, 所以

$$M(\lambda)-M(\lambda_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma-\lambda}-\frac{1}{\sigma-\lambda_0}\right)\mathrm{d}\rho(\sigma)-c(\lambda-\lambda_0).$$

当 M 是极限点时, Weyl 函数唯一. 如果用

$$\rho(0)=0,\quad \rho(\lambda+0)=\rho(\lambda)$$

(Lebesgue-Stieltjes 测度与具体值无关, 只与 $\rho(\lambda+0)-\rho(\lambda-0)$ 有关!) 来规范谱函数, 则由 Titchmarsh 公式, 谱函数是唯一的, Weyl 函数则可以用谱函数反演出来.

定理 3.7.6 (1) 若 $M(\lambda)$ 在 $\{\lambda=\sigma+\mathrm{i}\tau\,|a\leqslant\sigma\leqslant b,0\leqslant\tau\leqslant\delta\}$ 上连续, 则

$$\rho'(\sigma)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}M(\sigma),\quad \sigma\in[a,b].$$

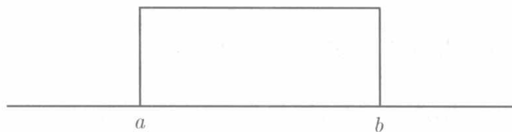


图 3.6

(2) 若 $M(\lambda)$ 在 $\{\lambda=\sigma+\mathrm{i}\tau\,|a\leqslant\sigma\leqslant b,-\delta<\tau<\delta\}$ 上连续, 则

$$\rho(\sigma)=\text{const},\quad \sigma\in[a,b]\,.$$



图 3.7

(3) 若 $M(\lambda)$ 在 $\{\lambda=\sigma+\mathrm{i}\tau\,|a<\sigma<b,-\delta<\tau<\delta\}$ 上半纯, 则 $M(\lambda)$ 的每一个极点 λ_0 都是 ρ 的间断点,

$$\rho(\lambda_0+0)-\rho(\lambda_0-0)=-\mathrm{Res}_{\lambda_0}M,$$

且在 M 相邻的两个极点之间 $\rho=\text{const}$ (这就表示 ρ 的间断点都是 M 的极点!).

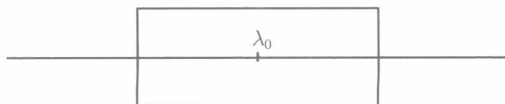


图 3.8

证明　(1) 取 $\xi\in(a,b)$ 是 ρ 的连续点, 则对任何 $\sigma\in[a,b]$, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\xi^\sigma \mathrm{Im}M(\varepsilon+\mathrm{i}\tau)\mathrm{d}\varepsilon$ 在 $[0,\delta]$ 上连续, 所以

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{1}{\pi}\int_\xi^\sigma \mathrm{Im}M(\varepsilon+\mathrm{i}\tau)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{1}{\pi}\int_\xi^\sigma \mathrm{Im}M(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon.$$

于是 ρ 在 $[a,b]$ 上连续且

$$\rho(\sigma)=\rho(\xi)+\frac{1}{\pi}\int_\xi^\sigma \mathrm{Im}M(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon,\quad \rho'(\sigma)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}M(\sigma).$$

(2) 因为 $\overline{M(\sigma+\mathrm{i}\tau)}=M(\sigma-\mathrm{i}\tau)$,

$$M(\sigma)=\lim_{\tau\to0}M(\sigma\pm\mathrm{i}\tau)=\lim_{\tau\to+0}M(\sigma+\mathrm{i}\tau)=\lim_{\tau\to+0}\overline{M(\sigma+\mathrm{i}\tau)},$$

所以 $M(\sigma)$ 是实的. 在 $[a,b]$ 上 ρ 的连续点 σ 处,

$$\rho(\sigma)=\rho(\xi)+\frac{1}{\pi}\int_\xi^\sigma \mathrm{Im}M(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon,$$

这个等式几乎处处成立, 所以点点成立. 于是由 (1),

$$\rho'(\sigma)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}M(\sigma)=0,\quad \sigma\in[a,b],$$

$$\rho(\sigma)=\mathrm{const},\quad \sigma\in[a,b].$$

(3) 取一个含 λ_0 的闭路 $\varGamma$ 如图 3.9 所示, $\varGamma$ 内只含 $M(\lambda)$ 的一个极点 λ_0, ξ,η 是 ρ 的连续点.

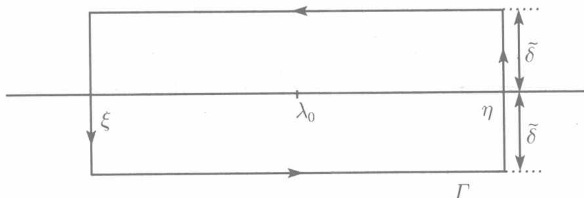


图 3.9

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{\lambda_0}M&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varGamma M(\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\int_\xi^\eta(M(t-\mathrm{i}\widetilde{\delta})-M(t+\mathrm{i}\widetilde{\delta}))\mathrm{d}t+\int_{-\widetilde{\delta}}^{\widetilde{\delta}}(M(\eta+\mathrm{i}s)-M(\xi+\mathrm{i}s))\mathrm{d}s\right].\end{aligned}$$

由于残数与 $\widetilde{\delta}$ 无关, 让 $\widetilde{\delta}\to+0$ 得

$$\mathrm{Res}_{\lambda_0}M=\lim_{\widetilde{\delta}\to+0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\xi^\eta(\overline{M(t+\mathrm{i}\widetilde{\delta})}-M(t+\mathrm{i}\widetilde{\delta}))\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\widetilde{\delta}\to+0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\xi}^{\eta} (-2\mathrm{i}\mathrm{Im}M(t+\mathrm{i}\widetilde{\delta}))\mathrm{d}t \\
&= -\left(\rho(\eta)-\rho(\xi)\right).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\rho(\lambda_0+0)-\rho(\lambda_0-0) = -\mathrm{Res}_{\lambda_0} M.
$$

在 M 的相邻的两个极点之间, 由 (2), $\rho = \mathrm{const}$.

3.8 极限点情形的特征展开

由 3.7 节, 谱函数 ρ 存在.

定理 3.8.1 若 $f\in L^2[0,\infty)$, 则存在 $\widehat{f}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 使得

$$
\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}(\lambda) - \int_0^A f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x \right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) = 0,
$$

即 (在 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 意义下)

$$
\widehat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x
$$

(称 $\widehat{f}$ 为 f 的广义 Fourier 变换) 且有

$$
\|f\|^2 = \left\|\widehat{f}\right\|_\rho^2.
$$

$\left(\text{即 Parseval 等式} \int_0^\infty |f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right).$

证明 (1) 设 $f\in C_0^\infty(0,\infty)$, 这时积分 $\widehat{f}(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 按通常的意义存在并且是 λ 的连续函数. 对 Mf 在 $[0,b]$ 上用 Parseval 等式得

$$
\int_0^b |Mf(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^b Mf(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x \right|^2 \mathrm{d}\rho_b(\lambda).
$$

在 b 充分大时,

$$
\int_0^\infty |Mf(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^\infty Mf(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x \right|^2 \mathrm{d}\rho_b(\lambda).
$$

由 Green 公式,

$$
\int_0^\infty Mf(x)\overline{\theta(x,\lambda)}\mathrm{d}x - \int_0^\infty f(x)\overline{M\theta(x,\lambda)}\mathrm{d}x = [f,\theta(\cdot,\lambda)]_0^\infty = 0,
$$

故

$$\int_0^{\infty} Mf(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty} f(x)M\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x=\lambda\int_0^{\infty} f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x=\lambda\widehat{f}(\lambda),$$

于是 b 充分大时,

$$\int_0^{\infty}|Mf(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho_b(\lambda).$$

对充分大的 $\mu>0$, 记 $\varDelta=(-\infty,\infty)\backslash(-\mu,\mu)$, 有

$$\begin{aligned}\mu^2\int_{\varDelta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho_b(\lambda)\leqslant\int_{\varDelta}\lambda^2\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho_b(\lambda)&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho_b(\lambda)\\&=\int_0^{\infty}|Mf(x)|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\varDelta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho_b(\lambda)\leqslant\frac{1}{\mu^2}\int_0^{\infty}|Mf(x)|^2\mathrm{d}x.$$

这个不等式对充分大的 b 一致成立. 另外, 在充分大的有限区间 $[0,b]$ 上对 f 用 Parseval 等式又有

$$\int_0^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho_b(\lambda)=\left(\int_{-\mu}^{\mu}+\int_{\varDelta}\right)\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho_b(\lambda),$$

所以

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\int_{-\mu}^{\mu}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right|\\\leqslant&\left|\int_{-\mu}^{\mu}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho_b(\lambda)-\int_{-\mu}^{\mu}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right|+\left|\int_{\varDelta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho_b(\lambda)\right|.\end{aligned}$$

先取定 μ 充分大, 使得

$$\left|\int_{\varDelta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho_b(\lambda)\right|\leqslant\frac{1}{\mu^2}\int_0^{\infty}|Mf(x)|^2\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再取一串 $\{b_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{b_n}(\lambda)=\rho(\lambda)$, 在 $[-\mu,\mu]$ 上用 Helly 积分定理, 当 n 充分大时, 有

$$\left|\int_{-\mu}^{\mu}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho_{b_n}(\lambda)-\int_{-\mu}^{\mu}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

所以

$$\int_0^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

同时也就证明了 $\widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$!

(2) 设 $f \in L^2[0,\infty)$, 在 ∞ 的某邻域内为 0.

这时积分$g(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 按通常的意义也存在, 并且是 λ 的连续函数. 存在 $f_n \in C_0^\infty(0,\infty)$, 使得 $\|f_n - f\| \to 0$. 令

$$\widehat{f}_n(\lambda) = \int_0^\infty f_n(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x,$$

则由 (1) 可知 $\widehat{f}_n \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 由

$$\left\|\widehat{f}_m - \widehat{f}_n\right\|_\rho^2 = \|f_m - f_n\|^2$$

知 $\left\{\widehat{f}_n\right\}$ 是 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 的基本列, 所以极限 $\widehat{f}$ 存在且

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{f}\right\|_\rho^2 &= \int_{-\infty}^\infty \left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \left|\widehat{f}_n(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty |f_n(x)|^2\mathrm{d}x = \int_0^\infty |f(x)|^2\mathrm{d}x = \|f\|^2.\end{aligned}$$

剩下来要证明 $\widehat{f}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 按 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 意义成立.

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x,$$

当 A 充分大时, 考虑

$$g(\lambda) - \widehat{f}_n(\lambda) = \int_0^\infty (f(x) - f_n(x))\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x = \int_0^A (f(x) - f_n(x))\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x,$$

由 Schwarz 不等式,

$$\left|g(\lambda) - \widehat{f}_n(\lambda)\right| \leqslant \int_0^A |f(x) - f_n(x)|\,|\theta(x,\lambda)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f - f_n\|\,\|\theta(\cdot,\lambda)\|_A,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{f}_n(\lambda) = g(\lambda), \quad \lambda \in (-\infty,\infty), \text{点点成立},$$

而 $\left\{\widehat{f}_n\right\}$ 平均收敛到 $\widehat{f}$, 所以由 Riesz 定理, 存在 $\left\{\widehat{f}_n(\lambda)\right\}$ 子列几乎处处收敛到 $\widehat{f}(\lambda)$, 因此

$$\widehat{f}(\lambda) = g(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x.$$

(3) $f \in L^2[0,\infty)$.

令

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0, & x > a, \end{cases}$$

$\widehat{f}_a(\lambda) = \int_0^a f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 是 λ 的连续函数, 由 (2) 可知 $\widehat{f}_a \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$. 显然

$$\left\|\widehat{f}_a - \widehat{f}_c\right\|_\rho^2 = \|f_a - f_c\|^2 = \int_a^c |f(x)|^2\mathrm{d}x \to 0, \quad c > a \to \infty,$$

所以 $\left\{\widehat{f}_a\right\}$ 是 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 的基本列, 存在极限 $\widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 由

$$\left\|\widehat{f}_a\right\|_\rho^2 = \int_0^a |f(x)|^2\mathrm{d}x$$

可得

$$\left\|\widehat{f}\right\|_\rho^2 = \lim_{a\to\infty}\left\|\widehat{f}_a\right\|_\rho^2 = \lim_{a\to\infty}\int_0^a |f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_0^\infty |f(x)|^2\mathrm{d}x = \|f\|^2,$$

$$\widehat{f} = \lim_{a\to\infty}\widehat{f}_a,$$

即

$$\widehat{f} = \int_0^\infty f(x)\theta(x,\cdot)\mathrm{d}x$$

或

$$\int_{-\infty}^\infty \left|\widehat{f}(\lambda) - \int_0^a f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) \to 0, \quad a \to \infty.$$

定理 3.8.2 (特征展开定理)　若 $f \in L^2[0,\infty)$, 则

$$\lim_{\substack{\mu\to-\infty,\\ \nu\to+\infty}} \int_0^\infty \left|f(x) - \int_\mu^\nu \widehat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}x = 0,$$

即 (在 $L^2[0,\infty)$ 意义下)

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

证明　(1) 记 $\varDelta = (\mu,\nu]$, $f_\varDelta = \int_\varDelta \widehat{f}(\lambda)\theta(\cdot,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda) \in L^2[0,\infty)$.

由于 $\widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, $\theta(x,\lambda)$ 是 λ 的连续函数, 所以积分 $\int_\mu^\nu \widehat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)$ 存在, 它是 x 的连续函数.

设 $P \in L^2[0,\infty)$, $\mathrm{supp}P \subset [0,a]$, Q 是对应的广义 Fourier 变换, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f_{\Delta}(x)\overline{P(x)}\mathrm{d}x &= \int_0^{a} f_{\Delta}(x)\overline{P(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{a}\left(\int_{\Delta}\widehat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)\overline{P(x)}\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{\text{Fubini 定理}} \int_{\Delta}\widehat{f}(\lambda)\left(\int_0^{a}\overline{P(x)}\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\rho(\lambda) \\ &= \int_{\Delta}\widehat{f}(\lambda)\overline{Q(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda) \\ &\leqslant \left(\int_{\Delta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{\Delta}|Q(\lambda)|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\int_{\Delta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Q(\lambda)|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Delta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^{\infty}|P(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

取

$$P(x) = \begin{cases} f_{\Delta}(x), & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0, & x > a, \end{cases}$$

因为 $f_{\Delta}(x)$ 连续, $P \in L^2[0,\infty)$, 于是由前面的不等式得

$$\begin{aligned}\int_0^{a}|f_{\Delta}(x)|^2\,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_{\Delta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^{\infty}|P(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Delta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^{a}|f_{\Delta}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\left(\int_0^{a}|f_{\Delta}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_{\Delta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}},$$

右边与 a 无关, 所以

$$\left(\int_0^{\infty}|f_{\Delta}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_{\Delta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$f_{\Delta} \in L^2[0,\infty).$$

(2) 如果 $f_1, f_2 \in L^2[0,\infty)$, 对应的广义 Fourier 变换是 $\widehat{f_1}, \widehat{f_2}$, 则由

$$4f_1\overline{f_2} = |f_1+f_2|^2 - |f_1-f_2|^2 + \mathrm{i}\,|f_1+\mathrm{i}f_2|^2 - \mathrm{i}\,|f_1-\mathrm{i}f_2|^2$$

可得广义的 Parseval 等式

$$\int_0^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f_1}(\lambda)\overline{\widehat{f_2}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

(3) $f=\lim\limits_{\Delta\to(-\infty,\infty)} f_\Delta$, 即 $f=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\lambda)\theta(\cdot,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)$.

设 $P\in L^2[0,\infty)$, $\mathrm{supp}P\subset[0,a]$, Q 是 P 的广义 Fourier 变换, 由广义的 Parseval 等式得

$$\int_0^\infty f(x)\overline{P(x)}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\lambda)\overline{Q(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda),$$

记 $\Delta^{\mathrm{C}}=(-\infty,\infty)\backslash\Delta$, 由 (1),

$$\int_0^\infty f_\Delta(x)\overline{P(x)}\mathrm{d}x=\int_\Delta\widehat{f}(\lambda)\overline{Q(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda),$$

故

$$\int_0^\infty (f(x)-f_\Delta(x))\overline{P(x)}\mathrm{d}x=\int_{\Delta^{\mathrm{C}}}\widehat{f}(\lambda)\overline{Q(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda),$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty (f(x)-f_\Delta(x))\overline{P(x)}\mathrm{d}x\right|^2&=\left|\int_{\Delta^{\mathrm{C}}}\widehat{f}(\lambda)\overline{Q(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda)\right|^2\\&\leqslant\int_{\Delta^{\mathrm{C}}}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\cdot\int_{\Delta^{\mathrm{C}}}|Q(\lambda)|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\\&\leqslant\int_{\Delta^{\mathrm{C}}}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|Q(\lambda)|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\\&=\int_{\Delta^{\mathrm{C}}}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\cdot\int_0^\infty|P(x)|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因为 $f_\Delta\in L^2[0,\infty)$, 取

$$P(x)=\begin{cases}f(x)-f_\Delta(x), & 0\leqslant x\leqslant a,\\ 0, & x>a,\end{cases}$$

则 $P\in L^2[0,\infty)$, 代入可得

$$\int_0^a|f(x)-f_\Delta(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Delta^{\mathrm{C}}}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda),$$

右边与 a 无关, 故

$$\int_0^\infty|f(x)-f_\Delta(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Delta^{\mathrm{C}}}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

让 $\Delta\to(-\infty,\infty)$ 即得

$$\int_0^\infty\left|f(x)-\int_\mu^\nu\widehat{f}(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\right|^2\mathrm{d}x\to 0,\quad \mu\to-\infty,\nu\to+\infty.$$

以上证明了

$$f\in L^2[0,\infty)\xrightarrow{U}\widehat{f}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$$

是一个等距线性算子, 而且 f 可以由 $\widehat{f}$ 反演得出. 下面还要证明 U 是 $L^2[0,\infty) \to L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 的酉算子, 即 U 是满射.

定义 3.8.1 对任意的 $f \in L^2[0,\infty)$, 定义

$$Uf = \widehat{f},$$

则 U 是等距线性算子.

定义 3.8.2 对任意的 $g = \widehat{f} \in \mathrm{ran}U$, 定义

$$\check{g} = \widetilde{U}g = f,$$

则 $\widetilde{U}U = \mathrm{id}_{L^2[0,\infty)}$, $U\widetilde{U} = \mathrm{id}_{\mathrm{ran}U}$.

引理 3.8.1 设 $g \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 记 $\varDelta = (\mu,\nu]$,

$$f_\varDelta(x) = \int_\varDelta g(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),$$

则 $f_\varDelta \in L^2[0,\infty)$ 且存在 $f \in L^2[0,\infty)$, 使得

$$\lim_{\substack{\mu\to-\infty,\\ \nu\to+\infty}} \int_0^\infty |f(x) - f_\varDelta(x)|^2 \mathrm{d}x = 0,$$

即 (在 $L^2[0,\infty)$ 意义下)

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty g(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

证明 $f_\varDelta \in L^2[0,\infty)$ 的证明同前, 下面要证明 $\{f_\varDelta\}$ 是 $L^2[0,\infty)$ 的基本列. 设 $\varDelta_1 \supset \varDelta_2$, $P \in L^2[0,\infty)$, 对充分大的 x, P 为 0, Q 是 P 的广义 Fourier 变换. 考虑

$$\int_0^\infty (f_{\varDelta_1}(x) - f_{\varDelta_2}(x))\overline{P(x)}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\int_{\varDelta_1\setminus\varDelta_2} g(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)\overline{P(x)}\mathrm{d}x,$$

由于积分实际是在有限区间上进行的, 因而可以交换积分次序, 所以

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \int_{\varDelta_1\setminus\varDelta_2} g(\lambda)\left(\int_0^\infty \overline{P(x)\theta(x,\lambda)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\rho(\lambda) \\ &= \int_{\varDelta_1\setminus\varDelta_2} g(\lambda)\overline{Q(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda), \end{aligned}$$

利用 Schwarz 不等式,

$$\text{上式} \leqslant \left(\int_{\varDelta_1\setminus\varDelta_2} |g(\lambda)|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\varDelta_1\setminus\varDelta_2} |Q(\lambda)|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}$$

取

$$P(x) = \begin{cases} f_{\Delta_1}(x) - f_{\Delta_2}(x), & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0, & x > a \end{cases}$$

(因为 $f_{\Delta_1}, f_{\Delta_2}$ 是 x 的连续函数, 所以 $P \in L^2[0,\infty)$), 则有

$$\begin{aligned} \int_0^a |f_{\Delta_1}(x) - f_{\Delta_2}(x)|^2 \mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |g(\lambda)|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |Q(\lambda)|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |g(\lambda)|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^\infty |P(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

即

$$\int_0^a |f_{\Delta_1}(x) - f_{\Delta_2}(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |g(\lambda)|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda).$$

右边与 a 无关, 故

$$\int_0^\infty |f_{\Delta_1}(x) - f_{\Delta_2}(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{\Delta_1 \setminus \Delta_2} |g(\lambda)|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda),$$

这表明 $\{f_\Delta\}$ 是 $L^2[0,\infty)$ 的基本列.

定理 3.8.3　设 $g \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 则存在 $f \in L^2[0,\infty)$, 使得

$$\lim_{\substack{\mu \to -\infty \\ \nu \to +\infty}} \int_0^\infty \left| f(x) - \int_\mu^\nu g(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda) \right|^2 \mathrm{d}x = 0$$

且

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^\infty \left| g(\lambda) - \int_0^a f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x \right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) = 0,$$

即 (在 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 意义下)

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x = \widehat{f}(\lambda).$$

注　这表示对任意的 $g \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, $\exists f \in L^2[0,\infty)$, 使得

$$Uf = g,$$

即 U 是满射. 故 $U : L^2[0,\infty) \to L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 是酉算子, $\widetilde{U} = U^{-1}$.

证明　由引理 3.8.1, 存在 $f \in L^2[0,\infty)$, 使得在 $L^2[0,\infty)$ 意义下,

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty g(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

而由定理 3.8.1 与定理 3.8.2, $\widehat{f}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 且在 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 意义下,

$$\widehat{f}(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x.$$

同时在 $L^2[0,\infty)$ 意义下,

$$f(x)=\int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

下面要证明的是 $g=\widehat{f}$, 即

$$\int_{-\infty}^\infty \left|g(\lambda)-\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)=0.$$

记 $r=g-\widehat{f}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 来证明它是 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 的零元素. 记 $\varDelta=(\mu,\nu]$,

$$f_\varDelta(x)=\int_\varDelta g(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),$$

$$\widehat{f}_\varDelta(x)=\int_\varDelta \widehat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

由定理 3.8.2,

$$\lim_{\varDelta\to(-\infty,\infty)}\widehat{f}_\varDelta=f,\quad L^2[0,\infty)\text{意义下},$$

而引理 3.8.1 的结论是

$$\lim_{\varDelta\to(-\infty,\infty)}f_\varDelta=f,\quad L^2[0,\infty)\text{意义下}.$$

令 $h_\varDelta=f_\varDelta-\widehat{f}_\varDelta(x$ 的连续函数), 则

$$\lim_{\varDelta\to(-\infty,\infty)}h_\varDelta=0,\quad L^2[0,\infty)\text{ 意义下}.$$

而

$$h_\varDelta(x)=\int_\varDelta r(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

那么怎样得到 $r=0$ 呢? 这样想:

$$r=0\Rightarrow h_\varDelta=0\Rightarrow\int_0^s h_\varDelta(x)\mathrm{d}x=\int_\varDelta r(\lambda)\left(\int_0^s\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

即

$$\int_\varDelta r(\lambda)\varGamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

其中, $\Gamma_s(\lambda)=\int_0^s\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x$. 如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)|\,\mathrm{d}\rho(\lambda)<\infty$ (这一点不成问题, 因为 $r\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 而 $\Gamma_s(\lambda)=\int_0^\infty\chi_{[0,s]}(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 也属于 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$), 则由 Lebesgue 控制收敛定理 (当 μ,ν 是 ρ 的连续点时) , 有

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\arctan\frac{\nu-\lambda}{\varepsilon}-\arctan\frac{\mu-\lambda}{\varepsilon}\right)r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

即

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_\mu^\nu\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(\sigma-\lambda)^2}\mathrm{d}\sigma\right)r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0.$$

利用 Fubini 定理, 得到

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_\mu^\nu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(\sigma-\lambda)^2}r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\mathrm{d}\sigma=0,$$

即

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_\mu^\nu\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda)}{\lambda-(\sigma+\mathrm{i}\varepsilon)}\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\mathrm{d}\sigma=0.$$

因为 $\Delta=(\mu,\nu]$ 任意, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda)}{\lambda-(\sigma+\mathrm{i}\varepsilon)}\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

即

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)}\int_\Delta\frac{r(\lambda)}{\lambda-(\sigma+\mathrm{i}\varepsilon)}\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0$$

或

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)}\int_\Delta\int_0^s\frac{r(\lambda)}{\lambda-(\sigma+\mathrm{i}\varepsilon)}\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x\mathrm{d}\rho(\lambda)=0.$$

于是

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)}\int_0^s\left(\int_\Delta\frac{r(\lambda)}{\lambda-(\sigma+\mathrm{i}\varepsilon)}\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\int_0^s\left(\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)}\int_\Delta\frac{r(\lambda)}{\lambda-(\sigma+\mathrm{i}\varepsilon)}\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\right)\mathrm{d}x=0.$$

因为 s 任意, 所以

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)}\int_\Delta\frac{r(\lambda)}{\lambda-(\sigma+\mathrm{i}\varepsilon)}\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0.$$

记

$$H_\Delta(x,\xi)=\int_\Delta\frac{r(\lambda)}{\lambda-\xi}\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),\quad \xi=\sigma+\mathrm{i}\varepsilon,\varepsilon>0,$$

则

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)} H_\Delta(x,\xi)=0,\quad \text{在 } L^2[0,\infty) \text{ 意义下},$$

所以应当由 $\lim\limits_{\Delta\to(-\infty,\infty)} h_\Delta = 0$ 得到 $\lim\limits_{\Delta\to(-\infty,\infty)} H_\Delta(x,\xi) = 0$, 然后倒推回去得出 $r=0$. 下面开始正式证明.

(1) 令

$$H_\Delta(x,\xi)=\int_\Delta \frac{r(\lambda)}{\lambda-\xi}\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),\quad \mathrm{Im}\xi>0.$$

因为 $r\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$,

$$\left|\frac{r(\lambda)}{\lambda-\xi}\right|^2=\frac{|r(\lambda)|^2}{(\mathrm{Re}\xi-\lambda)^2+(\mathrm{Im}\xi)^2}\leqslant\frac{|r(\lambda)|^2}{(\mathrm{Im}\xi)^2},$$

所以

$$\frac{r}{\lambda-\xi}\in L^2_\rho(-\infty,\infty).$$

由引理 3.8.1, 存在 $H(\cdot,\xi)\in L^2[0,\infty)$, 使得

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)} H_\Delta(\cdot,\xi)=H(\cdot,\xi),\quad \text{在 } L^2[0,\infty) \text{ 意义下}.$$

可是 $M\theta=\lambda\theta$, 故

$$\begin{aligned}
MH_\Delta&=\int_\Delta \frac{r(\lambda)}{\lambda-\xi}\lambda\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\\
&=\int_\Delta r(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)+\xi\int_\Delta\frac{r(\lambda)}{\lambda-\xi}\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\\
&=h_\Delta+\xi H_\Delta,
\end{aligned}$$

即

$$(M-\xi)H_\Delta=h_\Delta.$$

注意到 H_Δ 在 0 点满足 θ 适合的边条件, 即

$$\sin\alpha H_\Delta(0,\xi)-\cos\alpha p(0)H'_\Delta(0,\xi)=0.$$

而 $My=\xi y$ 有两个线性无关的解 $\varphi(x,\xi)$ 和 $\theta(x,\xi)$, 用常数变易法知非齐次微分方程 $(M-\xi)y=h_\Delta$ 的解应该是

$$y=C_1\varphi(x,\xi)+C_2\theta(x,\xi)+\int_0^x(\varphi(x,\xi)\theta(t,\xi)-\varphi(t,\xi)\theta(x,\xi))h_\Delta(t)\mathrm{d}t.$$

特别地, $H_\Delta(x,\xi)$ 可以这样表示, 因为 H_Δ 与 θ 在 0 点满足同一边条件, 可是 φ 却不满足这一边条件, 故

$$C_1 = 0,$$

所以

$$H_\Delta(x,\xi) = C_\Delta\theta(x,\xi) + \int_0^x (\varphi(x,\xi)\theta(t,\xi) - \varphi(t,\xi)\theta(x,\xi))\, h_\Delta(t)\mathrm{d}t.$$

由于 $\lim\limits_{\Delta\to(-\infty,\infty)} h_\Delta = 0(L^2[0,\infty)$ 意义下), 利用范数收敛必弱收敛的性质, 可得

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)} \int_0^x (\varphi(x,\xi)\,\theta(t,\xi) - \varphi(t,\xi)\,\theta(x,\xi))\, h_\Delta(t)\mathrm{d}t = 0,$$

而 $\lim\limits_{\Delta\to(-\infty,\infty)} H_\Delta = H$ ($L^2[0,\infty)$ 意义下), 有子列几乎处处收敛, 所以

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)} C_\Delta\theta(x,\xi) = H(x,\xi), \text{p.p. (对 } x \text{ 而言)}$$

即存在 c 使得

$$H(x,\xi) = c\theta(x,\xi), \quad (\text{p.p. 对 } x \text{ 而言})$$

可是在极限点情形下, $\theta \notin L^2[0,\infty)$. 因此 $c = 0$,

$$H(x,\xi) = 0, \quad \mathrm{Im}\xi > 0.$$

(2) 令

$$\Gamma_s(x) = \int_0^s \theta(x,\lambda)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \chi_{[0,s]}(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x,$$

因为 $\chi_{[0,s]} \in L^2[0,\infty)$, 所以 $\Gamma_s = \widehat{\chi}_{[0,s]} \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$,

$$\int_0^s H_\Delta(x,\xi)\,\mathrm{d}x = \int_0^s \int_\Delta \frac{r(\lambda)}{\lambda-\xi}\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\mathrm{d}x = \int_\Delta \frac{r(\lambda)}{\lambda-\xi}\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

$\{H_\Delta\}$ 在 $L^2[0,\infty)$ 中收敛到 0, 必弱收敛到 0, 故

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)} \int_\Delta \frac{r(\lambda)}{\lambda-\xi}\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda) &= \lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)} \int_0^s H_\Delta(x,\xi)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)} \int_0^\infty H_\Delta(x,\xi)\,\chi_{[0,s]}(x)\mathrm{d}x = 0,\end{aligned}$$

即

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{r(\lambda)}{\lambda-\xi}\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda) = 0.$$

不妨假设定理里给的 g 是实的. 不然的话, 可以将 g 分解为 $g = g_1 + \mathrm{i}g_2$, g_1, g_2 为实函数且 $g_1, g_2 \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$. 当 g 实时, 因为对实的 λ, $\theta(x,\lambda)$ 是实的, 于是 f_Δ 为实函数, 从而 f 为实函数, 那么 $\widehat{f}$ 也是实的, 于是 r 是实的. 对 $\xi = \sigma + \mathrm{i}\varepsilon$,

$$0 = \int_\mu^\nu \mathrm{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{r(\lambda)}{\lambda-\xi}\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\mathrm{d}\sigma = \int_\mu^\nu \int_{-\infty}^\infty \frac{\varepsilon r(\lambda)}{(\lambda-\sigma)^2+\varepsilon^2}\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\mathrm{d}\sigma. \quad (3.3)$$

因为 $r,\Gamma_s\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, $\int_{-\infty}^{\infty}|r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)|\,\mathrm{d}\rho(\lambda)<\infty$, 所以由 Fubini 定理,

$$
\begin{aligned}
(3.3)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu}^{\nu}\frac{\varepsilon}{(\lambda-\sigma)^2+\varepsilon^2}r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\rho(\lambda)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\arctan\frac{\nu-\lambda}{\varepsilon}-\arctan\frac{\mu-\lambda}{\varepsilon}\right)r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),
\end{aligned}
$$

让 $\varepsilon\to+0$ 得

$$
0=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\arctan\frac{\nu-\lambda}{\varepsilon}-\arctan\frac{\mu-\lambda}{\varepsilon}\right)r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),
$$

由 Lebesgue 控制收敛定理, 当 μ,ν 都是 ρ 的连续点时,

$$
\text{上式右端}\ =\pi\int_{\mu}^{\nu}r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),
$$

所以

$$
\int_{\mu}^{\nu}r(\lambda)\Gamma_s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0,\quad \mu,\nu\ \text{都是}\ \rho\ \text{的连续点},
$$

即

$$
0=\int_{\Delta}r(\lambda)\int_0^s\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x\mathrm{d}\rho(\lambda)=\int_0^s\int_{\Delta}r(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\mathrm{d}x=\int_0^s h_{\Delta}(x)\mathrm{d}x,
$$

所以 $h_{\Delta}(x)=0$, $\Delta=(\mu,\nu]$, μ,ν 是 ρ 的连续点.

(3) 若 $\cos\alpha\neq0$, 因为 $\theta(0,\lambda)=\cos\alpha$, 故由 $h_{\Delta}(0)=0$ 得

$$
\int_{\Delta}r(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0.
$$

当 $\cos\alpha=0$ 时, $\sin\alpha\neq0$, 由

$$
0=h'_{\Delta}(x)=\int_{\Delta}r(\lambda)\theta'(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),
$$

$$
h'_{\Delta}(0)=0.
$$

同样, 可得

$$
\int_{\Delta}r(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0,\quad \Delta=(\mu,\nu],\quad \mu,\nu\ \text{是}\ \rho\ \text{的连续点}.
$$

设 ω 是 $\rho(\lambda)$ 的间断点, 因为 $\rho(\lambda)$ 的间断点可数, 任何含 ω 的区间 Δ 里都必有 ρ 的连续点 μ,ν 使 $\mu<\omega<\nu$. 所以存在 $\{\mu_n\},\{\nu_n\}$ 都是 $\rho(\lambda)$ 的连续点, 使得

$$
\mu_n<\mu_{n+1}<\omega<\nu_{n+1}<\nu_n, \mu_n\uparrow\omega, \nu_n\downarrow\omega,
$$

$$0=\int_{\mu_n}^{\nu_n} r(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[\mu_n,\nu_n]}(\lambda)r(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),$$

$$\left|\chi_{[\mu_n,\nu_n]}(\lambda)r(\lambda)\right|\leqslant|r(\lambda)|\,\chi_{[\mu_1,\nu_1]}(\lambda).$$

由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\begin{aligned}0&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[\mu_n,\nu_n]}(\lambda)r(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\chi_{[\mu_n,\nu_n]}(\lambda)r(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\{\omega\}}(\lambda)r(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=r(\omega)\left(\rho(\omega)-\rho(\omega-0)\right),\end{aligned}$$

所以

$$r(\omega)=0.$$

于是

$$\int_K r(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0,\quad \forall\mu<\nu,$$

其中, K 为 $[\mu,\nu]$ 或 $[\mu,\nu),(\mu,\nu],(\mu,\nu)$, 所以对任何阶梯函数 $s(\lambda)$, 都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda)s(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=0.$$

由于阶梯函数在 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 中稠, 故 $r=0$.

定理 3.8.4 设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$\mathscr{D}(T)=\left\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,|\sin\alpha f(0)-\cos\alpha p(0)f'(0)=0\right\},$$

则

(1) $\forall f\in\mathscr{D}(T)$, 有 $\widehat{f},\lambda\widehat{f}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 且

$$\widehat{Tf}=\lambda\widehat{f};$$

(2) $f\in\mathscr{D}(T)\Leftrightarrow\widehat{f},\lambda\widehat{f}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$.

证明 (1) $\forall f\in\mathscr{D}(T)$, 有 $\widehat{f}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 记

$$f_\Delta(x)=\int_\Delta\widehat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),\quad \Delta=(\mu,\nu],$$

则由定理 3.8.2 的证明, $f_\Delta\in L^2[0,\infty)$ 且

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)}f_\Delta=f,\quad \text{在 } L^2[0,\infty) \text{ 意义下}.$$

因为 Δ 为有限区间, 所以

$$Mf_\Delta(x)=\int_\Delta\widehat{f}(\lambda)M\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=\int_\Delta\lambda\widehat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

令

$$g_\Delta(\lambda)=\begin{cases}\lambda\widehat{f}(\lambda), & \lambda\in\Delta,\\ 0, & \lambda\notin\Delta,\end{cases}$$

显然 $g_\Delta\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 而当 Δ_1 为有限区间时 (根据引理 3.8.1),

$$\int_{\Delta_1}g_\Delta(\lambda)\theta(\cdot,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\in L^2[0,\infty).$$

由于 $\Delta_1\supset\Delta$ 时,

$$\int_{\Delta_1}g_\Delta(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=\int_\Delta\lambda\widehat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=Mf_\Delta(x),$$

由引理 3.8.1,

$$\lim_{\Delta_1\to(-\infty,\infty)}\int_{\Delta_1}g_\Delta(\lambda)\theta(\cdot,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)=\lim_{\Delta_1\to(-\infty,\infty)}Mf_\Delta(\cdot)=Mf_\Delta,\quad 在\ L^2[0,\infty)\ 意义下.$$

故 $Mf_\Delta\in L^2[0,\infty)$ 且由定理 3.8.3,

$$\widehat{Mf}_\Delta=g_\Delta.$$

由于 θ 满足

$$\sin\alpha\theta(0)-\cos\alpha p(0)\theta'(0)=0,$$

f_Δ 也满足同样的边界条件, 所以 $f_\Delta\in\mathscr{D}(T)$. 这样对任意的 $h\in\mathscr{D}(T)$, 有

$$\begin{aligned}(f_\Delta,Th)=(Tf_\Delta,h)=(Mf_\Delta,h)&=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{Mf}_\Delta(\lambda)\overline{\widehat{h}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g_\Delta(\lambda)\overline{\widehat{h}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda)=\int_\Delta\lambda\widehat{f}(\lambda)\overline{\widehat{h}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda).\end{aligned}$$

让 $\Delta\to(-\infty,\infty)$, 因为范数收敛必弱收敛, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{Tf}(\lambda)\overline{\widehat{h}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda)=(Tf,h)=(f,Th)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\widehat{f}(\lambda)\overline{\widehat{h}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\widehat{Tf}(\lambda)-\lambda\widehat{f}(\lambda)\right)\overline{\widehat{h}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda)=0,\quad h\in\mathscr{D}(T).$$

因为 U 是酉算子, $\left\{\widehat{h}\,|h\in\mathscr{D}(T)\right\}$ 在 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 中稠, 所以

$$\widehat{Tf}=\lambda\widehat{f}$$

且 $\lambda\widehat{f}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$.

(2) 设 $f \in L^2[0,\infty)$, 使得 $\widehat{f}, \lambda\widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 则对任意的 $h \in \mathscr{D}(T)$, 有

$$\begin{aligned}(Th,f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Th}(\lambda)\overline{\widehat{f}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\widehat{h}(\lambda)\overline{\widehat{f}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\lambda)\overline{\lambda\widehat{f}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda) = \left(\widehat{h},\lambda\widehat{f}\right)_\rho = \left(h, U^{-1}(\lambda\widehat{f})\right),\end{aligned}$$

所以 $f \in \mathscr{D}(T)$ 而 $Tf = U^{-1}(\lambda\widehat{f})$.

推论 3.8.1　$\|Tf\|^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left|\lambda\widehat{f}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda), f \in \mathscr{D}(T)$.

推论 3.8.2 (谱分解的乘法算子形式)　设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 则

$$U : L^2[-\infty,\infty) \to L^2_\rho(-\infty,\infty),$$

$$Uf = \widehat{f} = \int_0^{\infty} f(x)\theta(x,\cdot)\mathrm{d}x$$

是酉算子, 而 T 与 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 上的乘法算子 A

$$\mathscr{D}(A) = \left\{g \in L^2_\rho(-\infty,\infty) \,\middle|\, \lambda g \in L^2_\rho(-\infty,\infty)\right\},$$

$$Ag = \lambda g, \quad g \in \mathscr{D}(A)$$

酉等价.

证明　(1) $U\mathscr{D}(T) = \mathscr{D}(A)$.

由定理 3.8.4, $U\mathscr{D}(T) \subset \mathscr{D}(A)$. 反过来, 若 $g \in \mathscr{D}(A)$, 则有 $f \in L^2[0,\infty)$ 使 $g = \widehat{f}$, 而 $\lambda\widehat{f} \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 所以 $f \in \mathscr{D}(T)$ 而 $Uf = \widehat{f} = g$, 于是 $\mathscr{D}(A) \subset U\mathscr{D}(T)$.

(2) 对任意的 $f \in \mathscr{D}(T)$, 有

$$U^{-1}AUf = U^{-1}A\widehat{f} = U^{-1}\left(\lambda\widehat{f}\right) = Tf.$$

对任意的 $g \in \mathscr{D}(A)$, 有 $f \in L^2[0,\infty)$ 使 $g = \widehat{f}$, 因为 $\lambda g \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 所以 $f \in \mathscr{D}(T)$,

$$UTU^{-1}g = UTU^{-1}\widehat{f} = UTf = \widehat{Tf} = \lambda\widehat{f} = \lambda g.$$

3.9　极限点情形的谱与谱分解

设 T 是最小算子 $T_0(M)$ 的自伴延拓

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \,|\sin\alpha f(0) - \cos\alpha p\,(0)\,f'(0) = 0\}.$$

引理 3.9.1　如果谱函数 $\rho(\lambda)$ 在 λ_0 有跳跃, 则 λ_0 是 T 的特征值.

证明 设 $\rho(\lambda_0+0)-\rho(\lambda_0-0)=k_0>0$, 则 $\forall f\in L^2[0,\infty)$, 满足 $\mathrm{supp}f\subset[0,a]$, 有

$$\widehat{f}(\lambda)=\int_0^a f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x$$

是 λ 的连续函数.

$$\int_0^a |f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\geqslant k_0\left|\widehat{f}(\lambda_0)\right|^2,$$

取

$$f(x)=\begin{cases}\theta(x,\lambda_0), & x\in[0,a],\\ 0, & x>a,\end{cases}$$

则

$$\int_0^a |\theta(x,\lambda_0)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant k_0\left(\int_0^a|\theta(x,\lambda_0)|^2\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

即

$$\int_0^a |\theta(x,\lambda_0)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{k_0},$$

右端与 a 无关, 故 $\theta(\cdot,\lambda_0)\in L^2[0,\infty)$, 注意到 θ 在零点满足的边界条件便得 $\lambda_0\in\sigma_p(T)$, 对应的特征函数是 $\theta(\cdot,\lambda_0)$.

定理 3.9.1 设 $\lambda_0\in\mathbf{C},\lambda_0I-T$ 是单射, $f\in L^2[0,\infty)$, 则

$$f\in\mathrm{ran}(\lambda_0I-T)=\mathscr{D}\left((\lambda_0I-T)^{-1}\right)\Leftrightarrow\frac{\widehat{f}}{\lambda_0-\lambda}\in L^2_\rho(-\infty,\infty).$$

这时

$$U\left((\lambda_0I-T)^{-1}f\right)=\frac{\widehat{f}}{\lambda_0-\lambda}$$

且

$$(\lambda_0I-T)^{-1}f=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{f}}{\lambda_0-\lambda}\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

注 特别地, 若 $\mathrm{Im}\mu\neq0$, 则

$$R_\mu f=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{f}}{\mu-\lambda}\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),\quad f\in L^2[0,\infty).$$

证明 (1)$\Rightarrow$ 设 $f\in\mathrm{ran}(\lambda_0I-T)$, 则存在 $g\in\mathscr{D}(T)$, 使得

$$f=(\lambda_0I-T)g=\lambda_0g-Tg.$$

于是

$$\widehat{f}=U\left(\lambda_0g-Tg\right)=(\lambda_0-\lambda)\,\widehat{g},$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\lambda)-(\lambda_0-\lambda)\widehat{g}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda_0-\lambda|^2\left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}-\widehat{g}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)=0.$$

当 $\mathrm{Im}\lambda_0\neq 0$ 时,

$$(\mathrm{Im}\lambda_0)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}-\widehat{g}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}-\widehat{g}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

$$\frac{\widehat{f}}{\lambda_0-\lambda}=\widehat{g}\in L^2_\rho(-\infty,\infty).$$

当 $\mathrm{Im}\lambda_0=0$ 时, 因为 $\lambda_0 I-T$ 是一一的, λ_0 不是特征值, 因此由引理 3.9.1, λ_0 是 $\rho(\lambda)$ 的连续点, $\{\lambda_0\}$ 对 ρ 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度来说是零测集. 对任意的 $\mu>\lambda_0$,

$$0\leqslant(\mu-\lambda_0)^2\int_{\mu}^{\infty}\left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}-\widehat{g}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^2\left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}-\widehat{g}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

所以

$$\int_{\mu}^{\infty}\left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}-\widehat{g}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

$$\int_{(\lambda_0,\infty)}\left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}-\widehat{g}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)=0.$$

同理

$$\int_{(-\infty,\lambda_0)}\left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}-\widehat{g}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)=0.$$

而 $\{\lambda_0\}$ 对 ρ 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度来说是零测度集, 故

$$\int_{\{\lambda_0\}}\left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}-\widehat{g}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)=0.$$

因此也有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}-\widehat{g}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

$$\frac{\widehat{f}}{\lambda_0-\lambda}=\widehat{g}\in L^2_\rho(-\infty,\infty).$$

(2)$\Leftarrow$ 设 $\dfrac{\widehat{f}}{\lambda_0-\lambda}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 由于 U 是满的, 所以存在 $g\in L^2[0,\infty)$, 使得

$$\frac{\widehat{f}}{\lambda_0-\lambda}=\widehat{g},$$

$$\widehat{f}=(\lambda_0-\lambda)\widehat{g}\ \ (\text{作为 } L^2_\rho(-\infty,\infty) \text{ 的元素}).$$

所以

$$\lambda\widehat{g}=\lambda_0\widehat{g}-\widehat{f}\in L^2_\rho(-\infty,\infty).$$

由定理 3.8.4 得 $g\in\mathscr{D}(T)$, 而

$$f=U^{-1}\widehat{f}=U^{-1}(\lambda_0\widehat{g}-\lambda\widehat{g})=\lambda_0 g-Tg=(\lambda_0 I-T)g\in\operatorname{ran}(\lambda_0 I-T).$$

对于 $f\in\operatorname{ran}(\lambda_0 I-T)$,

$$f=(\lambda_0 I-T)g,\quad g\in\mathscr{D}(T),$$

$$\widehat{f}=\lambda_0\widehat{g}-\lambda\widehat{g},\quad \widehat{g}=\frac{\widehat{f}}{\lambda_0-\lambda},$$

所以

$$U\left((\lambda_0 I-T)^{-1}f\right)=\widehat{g}=\frac{\widehat{f}}{\lambda_0-\lambda},$$

$$\begin{aligned}(\lambda_0 I-T)^{-1}f&=U^{-1}\left(U\left((\lambda_0 I-T)^{-1}f\right)\right)\\&=U^{-1}\left(\frac{\widehat{f}}{\lambda_0-\lambda}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}\theta(\cdot,\lambda)\,\mathrm{d}\rho(\lambda).\end{aligned}$$

定理 3.9.2 如果存在 $\delta>0$, 使得 $\rho(\lambda)$ 在 $(\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta)$ 上为常数, 则

$$\lambda_0\in\rho(T)$$

且

$$\|R_{\lambda_0}\|\leqslant\frac{1}{\delta}.$$

证明 (1) $\lambda_0 I-T$ 是单射.

若

$$(\lambda_0 I-T)u=0,$$

即

$$
\begin{aligned}
0 &= \|(\lambda_0 I - T)u\|^2 = \|U((\lambda_0 I - T)u)\|_\rho^2 = \left\|\lambda_0 \widehat{u} - \widehat{Tu}\right\|_\rho^2 \\
&= \|\lambda_0 \widehat{u} - \lambda \widehat{u}\|_\rho^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^2 |\widehat{u}(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}\rho(\lambda),
\end{aligned}
$$

与定理 3.9.1 的证明相同可得

$$
\int_{(\lambda_0,\infty)} |\widehat{u}(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}\rho(\lambda) = \int_{(-\infty,\lambda_0)} |\widehat{u}(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}\rho(\lambda) = 0.
$$

由于 ρ 在 $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ 上为常数, 故

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}\rho(\lambda) = 0,
$$

即 $\widehat{u} = 0$, 所以 $u = 0$.

(2) $\lambda_0 I - T$ 是满射.

对任意的 $f \in L^2[0,\infty)$, 有 $\widehat{f} \in L_\rho^2(-\infty,\infty)$, 而

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda}\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\lambda_0-\delta} \left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda}\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) + \int_{\lambda_0+\delta}^{\infty} \left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda}\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) \\
&\leqslant \frac{1}{\delta^2}\left(\int_{-\infty}^{\lambda_0-\delta} \left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) + \int_{\lambda_0+\delta}^{\infty} \left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)\right) \\
&= \frac{1}{\delta^2}\left\|\widehat{f}\right\|^2 = \frac{1}{\delta^2}\|f\|^2,
\end{aligned}
$$

由定理 3.9.1, $f \in \operatorname{ran}(\lambda_0 I - T) = \mathscr{D}\left((\lambda_0 I - T)^{-1}\right)$ 且

$$
U\left((\lambda_0 I - T)^{-1} f\right) = \frac{\widehat{f}}{\lambda_0 - \lambda},
$$

这表示 $\operatorname{ran}(\lambda_0 I - T) = \mathscr{D}\left((\lambda_0 I - T)^{-1}\right) = L^2[0,\infty)$.

(3) $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 有界.

由于

$$
\begin{aligned}
\|R_{\lambda_0} f\|^2 &= \left\|(\lambda_0 I - T)^{-1} f\right\|^2 = \|U((\lambda_0 I - T)^{-1} f)\|_\rho^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda}\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) \leqslant \frac{1}{\delta^2}\|f\|^2,
\end{aligned}
$$

所以 $\|R_{\lambda_0}\| \leqslant \dfrac{1}{\delta}$.

定理 3.9.3 λ_0是T的特征值的充要条件是$\rho(\lambda)$在λ_0有跳跃, 跃度$=\dfrac{1}{\|\theta(\cdot,\lambda_0)\|^2}$. 对应于 λ_0 的特征函数是 $\theta(\cdot,\lambda_0)$.

证明 $\Leftarrow$ 见引理 3.9.1.

$\Rightarrow$ 设 λ_0 是特征值, 由于 θ 满足 0 点的边界条件, 所以 $\theta(\cdot,\lambda_0)$ 是对应的特征函数. 于是 $\widehat{\theta}(\cdot,\lambda_0)$, $\lambda\widehat{\theta}(\cdot,\lambda_0)\in L_\rho^2(-\infty,\infty)$,

$$\lambda\widehat{\theta}(\lambda)=U\left(T\theta(\cdot,\lambda_0)\right)(\lambda)=U\left(\lambda_0\theta(\cdot,\lambda_0)\right)(\lambda)=\lambda_0\widehat{\theta}(\lambda),$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|(\lambda-\lambda_0)\widehat{\theta}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

由此

$$\int_{(-\infty,\lambda_0)}\left|\widehat{\theta}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)=\int_{(\lambda_0,\infty)}\left|\widehat{\theta}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)=0,$$

故

$$\begin{aligned}0\neq\|\theta(\cdot,\lambda_0)\|^2&=\left\|\widehat{\theta}\right\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\theta}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\\&=\left(\int_{(-\infty,\lambda_0)}+\int_{\{\lambda_0\}}+\int_{(\lambda_0,\infty)}\right)|\widehat{\theta}(\lambda)|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\\&=\left|\widehat{\theta}(\lambda_0)\right|^2(\rho(\lambda_0+0)-\rho(\lambda_0-0))=k_0\left|\widehat{\theta}(\lambda_0)\right|^2,\end{aligned}$$

这表示 ρ 在 λ_0 有跳跃. 注意到在 $L_\rho^2(-\infty,\infty)$ 意义下,

$$\widehat{\theta}_a(\lambda)=\int_0^a\theta(x,\lambda_0)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x\to\widehat{\theta}(\lambda),\quad a\to\infty.$$

设 $\varDelta$ 是含 λ_0 的区间, 则当 a 充分大时, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\theta}_a(\lambda)-\widehat{\theta}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\geqslant\int_{\varDelta}\left|\widehat{\theta}_a(\lambda)-\widehat{\theta}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\geqslant\left|\widehat{\theta}_a(\lambda_0)-\widehat{\theta}(\lambda_0)\right|^2k_0.$$

当 $a\to\infty$ 时, 上式左端趋于 0, 故

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}(\lambda_0)&=\lim_{a\to\infty}\widehat{\theta}_a(\lambda_0)=\lim_{a\to\infty}\int_0^a\theta(x,\lambda_0)\theta(x,\lambda_0)\mathrm{d}x\\&=\lim_{a\to\infty}\int_0^a|\theta(x,\lambda_0)|^2\mathrm{d}x=\|\theta(\cdot,\lambda_0)\|^2,\end{aligned}$$

这样便有

$$\left|\widehat{\theta}(\lambda_0)\right|^2=\|\theta(\cdot,\lambda_0)\|^4,$$

所以 $k_0 = 1/\|\theta(\cdot,\lambda_0)\|^2$.

定理 3.9.4 设 λ_0 是 ρ 的连续增长点 (即 ρ 在 λ_0 点连续, 并且 $\forall\delta>0$, $\rho(\lambda_0+\delta)>\rho(\lambda_0-\delta)$), 则 λ_0 是 T 的连续谱点.

证明 (1) 由于 λ_0 不是特征值, 所以 $(\lambda_0 I-T)^{-1}$ 存在. 现在证明 $\mathscr{D}((\lambda_0 I-T)^{-1})$ 在 $L^2[0,\infty)$ 中稠. 对任意的 $f\in L^2[0,\infty)$, 有 $\widehat{f}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$. 而

$$f=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\lambda)\theta(\cdot,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),\quad \text{在 } L^2_\rho(-\infty,\infty) \text{ 意义下}.$$

令

$$g(\lambda)=\begin{cases}\widehat{f}(\lambda), & \lambda\leqslant\lambda_0-\delta \text{ 或 } \lambda>\lambda_0+\delta,\\ 0, & \lambda_0-\delta<\lambda\leqslant\lambda_0+\delta,\end{cases}$$

则 $g\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 存在 $h\in L^2[0,\infty)$, 使得 $g=\widehat{h}$,

$$h=\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)\theta(\cdot,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

由于

$$\|f-h\|^2=\left\|\widehat{f}-\widehat{h}\right\|_\rho^2=\int_{\lambda_0-\delta<\lambda\leqslant\lambda_0+\delta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda),$$

而 $\widehat{f}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 利用积分的绝对连续性, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, 使得 $m_\rho(E)<\delta_1$ 时有

$$\int_E\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)<\varepsilon.$$

可是 λ_0 是 ρ 的连续点, 所以存在 $\delta>0$, 使得

$$m_\rho((\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta])=\rho(\lambda_0+\delta)-\rho(\lambda_0-\delta)<\delta_1,$$

因此

$$\|f-h\|^2<\varepsilon.$$

可是

$$\frac{\widehat{h}(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}=\begin{cases}\dfrac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}, & \lambda\leqslant\lambda_0-\delta,\lambda>\lambda_0+\delta,\\ 0, & \lambda_0-\delta<\lambda\leqslant\lambda_0+\delta,\end{cases}$$

所以

$$\left|\frac{\widehat{h}(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}\right|\leqslant\frac{1}{\delta}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|,\quad \frac{\widehat{h}(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}\in L^2_\rho(-\infty,\infty).$$

由定理 3.9.1,

$$h\in\mathscr{D}((\lambda_0 I-T)^{-1}),$$

故 $\mathscr{D}((\lambda_0 I-T)^{-1})$ 在 $L^2[0,\infty)$ 中稠.

(2) $(\lambda_0 I-T)^{-1}$ 无界.

取

$$g_n(\lambda)=\begin{cases}1, & \dfrac{1}{n}<|\lambda-\lambda_0|\leqslant\dfrac{2}{n},\\ 0, & \text{其余的 }\lambda,\end{cases}$$

则 $g_n\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 存在 $h_n\in L^2[0,\infty)$, 使得 $\widehat{h}_n=g_n$. 因为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{g_n(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)&=\int_{\frac{1}{n}<|\lambda-\lambda_0|\leqslant\frac{2}{n}}\frac{1}{|\lambda-\lambda_0|^2}\mathrm{d}\rho(\lambda)\\&\leqslant n^2 m_\rho\left(\left[\lambda_0-\frac{2}{n},\lambda_0-\frac{1}{n}\right)\cup\left(\lambda_0+\frac{1}{n},\lambda_0+\frac{2}{n}\right]\right)<\infty.\end{aligned}$$

故 $h_n\in\mathscr{D}((\lambda_0 I-T)^{-1})$, 而

$$\begin{aligned}\|(\lambda_0 I-T)^{-1}h_n\|^2&=\left\|\frac{\widehat{h}_n}{\lambda_0-\lambda}\right\|_\rho^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{g_n(\lambda)}{\lambda_0-\lambda}\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\\&\geqslant\left(\frac{n}{2}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}|g_n(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\rho(\lambda)=\left(\frac{n}{2}\right)^2\|h_n\|^2.\end{aligned}$$

所以 $(\lambda_0 I-T)^{-1}$ 无界.

推论 3.9.1 $\sigma_p(T)=\{\lambda|\lambda\text{ 为 }\rho\text{ 的间断点}\}$, $\sigma_c(T)=\{\lambda|\lambda\text{ 为 }\rho\text{ 的连续增长点}\}$.

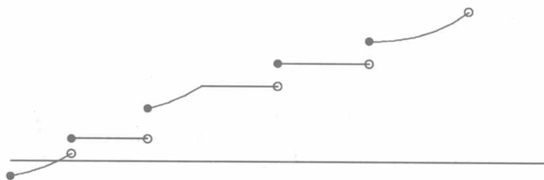


图 3.10

下面来给出 T 的谱分解, 只要定义 T 的谱族 $\{E_\lambda|\lambda\in\mathbf{R}\}$ 即可. 由推论 3.8.2, T 与 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 上的乘法算子 A 酉等价, 而 A 的谱族是知道的, 所以很自然地将通过 A 的谱族 $\{E_\mu(A)|\mu\in\mathbf{R}\}$ 来得出 T 的谱族 $\{E_\mu|\mu\in\mathbf{R}\}$

$$\begin{aligned}E_\mu f&=U^{-1}E_\mu(A)Uf=U^{-1}E_\mu(A)\widehat{f}=U^{-1}\begin{cases}\widehat{f}(\lambda), & \lambda\leqslant\mu,\\ 0, & \lambda>\mu\end{cases}\\&=\int_{-\infty}^{\mu}\widehat{f}(\lambda)\theta(\cdot,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),\quad \mu\in\mathbf{R}.\end{aligned}$$

定理 3.9.5 令

$$E_\mu f=\int_{-\infty}^{\mu}\widehat{f}(\lambda)\theta(\cdot,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda),\quad \mu\in\mathbf{R},$$

则 $\{E_\mu|\mu\in\mathbf{R}\}$ 满足

(1) E_μ 是正交投影算子;

(2) 若 $\mu\leqslant\nu$, 则 $E_\mu\leqslant E_\nu$;

(3) $E_{\mu+0}=E_\mu$;

(4) $\mathrm{s}-\lim\limits_{\mu\to-\infty}E_\mu=0,\quad \mathrm{s}-\lim\limits_{\mu\to\infty}E_\mu=I.$

证明　(1) E_μ 是正交投影算子.

由于

$$\|E_\mu f\|^2=\int_{-\infty}^{\mu}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)=\|f\|^2,\ E_\mu\text{有界},$$

对任意的 $f,g\in L^2[0,\infty)$,

$$(E_\mu f,g)=(\widehat{E_\mu f},\widehat{g})_\rho=\int_{-\infty}^{\mu}\widehat{f}(\lambda)\overline{\widehat{g}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda)=(\widehat{f},U(E_\mu g))_\rho=(f,E_\mu g).$$

所以 E_μ 自伴. 当 $\mu\leqslant\nu$ 时, 对任意的 $f,g\in L^2[0,\infty)$,

$$\begin{aligned}(E_\mu E_\nu f,g)&=(E_\nu f,E_\mu g)=(\widehat{E_\nu f},\widehat{E_\mu g})_\rho\\&=\int_{-\infty}^{\mu}\widehat{f}(\lambda)\overline{\widehat{g}(\lambda)}\mathrm{d}\rho(\lambda)=(\widehat{E_\mu f},\widehat{g})_\rho=(E_\mu f,g),\end{aligned}$$

所以 $E_\mu E_\nu=E_\mu$. 同理, $E_\nu E_\mu=E_\mu$. 特别地, $E_\mu^2=E_\mu$.

(2) $\mu\leqslant\nu,E_\mu\leqslant E_\nu$.

对任意的 $f\in L^2[0,\infty)$,

$$\begin{aligned}(E_\mu f,f)=\|E_\mu f\|^2=\left\|\widehat{E_\mu f}\right\|_\rho^2&=\int_{-\infty}^{\mu}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\leqslant\int_{-\infty}^{\nu}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)\\&=\left\|\widehat{E_\nu f}\right\|_\rho^2=\|E_\nu f\|^2=(E_\nu f,f).\end{aligned}$$

(3) $E_{\mu+0}=E_\mu$.

对任意的 $f\in L^2[0,\infty)$,　$\theta>0$, 有

$$\|E_{\mu+\theta}f-E_\mu f\|^2=\|(E_{\mu+\theta}-E_\mu)f\|^2=\|U(E_{\mu+\theta}-E_\mu)f\|_\rho^2=\int_{(\mu,\mu+\theta]}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

当 $\theta\to+0$ 时, $(\mu,\mu+\theta]\to\phi$, 所以

$$\lim_{\theta\to+0}\|E_{\mu+\theta}f-E_\mu f\|=0,$$

即

$$\lim_{\theta\to+0}E_{\mu+\theta}f=E_\mu f$$

或

$$\text{s}-\lim_{\theta\to+0}E_{\mu+\theta}=E_\mu,\quad E_{\mu+0}=E_\mu.$$

(4) $\text{s}-\lim\limits_{\mu\to-\infty}E_\mu=0,\ \ \text{s}-\lim\limits_{\mu\to+\infty}E_\mu=I.$

因为 $(-\infty,\mu)\to\phi,\mu\to-\infty;\ (-\infty,\mu)\to(-\infty,\infty),\mu\to+\infty.$

定理 3.9.6 $Tf=\int_{-\infty}^{\infty}\mu\mathrm{d}E_\mu f,\ f\in\mathscr{D}(T).$

注 为了证明定理 3.9.6, 只需证明

$$f\in\mathscr{D}(T)\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\mu^2\mathrm{d}\left\|E_\mu f\right\|^2<\infty\text{ 且 }Tf=\int_{-\infty}^{\infty}\mu\mathrm{d}E_\mu f.$$

后一等式意味着

$$Tf=\lim_{\substack{\alpha\to-\infty,\\ \beta\to\infty}}\int_\alpha^\beta\mu\mathrm{d}E_\mu f,$$

其中, $\int_\alpha^\beta\mu\mathrm{d}E_\mu f$ 是 Riemanm-Stieltjes 积分和数的极限.

证明

$$f\in\mathscr{D}(T)\Leftrightarrow\widehat{f},\quad\lambda\widehat{f}\in L_\rho^2(-\infty,\infty).$$

由于

$$\left\|E_\mu f\right\|^2=\int_{-\infty}^{\mu}\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda),$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu^2\mathrm{d}\left\|E_\mu f\right\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\mu^2\left|\widehat{f}(\mu)\right|^2\mathrm{d}\rho(\mu),$$

而

$$\lambda\widehat{f}\in L_\rho^2(-\infty,\infty)\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2\mathrm{d}\rho(\lambda)<\infty,$$

所以

$$f\in\mathscr{D}(T)\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\mu^2\mathrm{d}\left\|E_\mu f\right\|^2<\infty.$$

取 $(\alpha,\beta]$ 的分割, 记其最大长度为 l,

$$\alpha=\mu_0<\mu_1<\cdots<\mu_n=\beta.$$

因为

$$\lim_{l\to0}\sum_{k=1}^{n}\mu_k(E_{\mu_k}f-E_{\mu_{k-1}}f)=\int_\alpha^\beta\mu\mathrm{d}E_\mu f$$

所以

$$
\begin{aligned}
U\left(\int_\alpha^\beta \mu \mathrm{d}E_\mu f\right) &= \lim_{l\to 0} U\left(\sum_{k=1}^n \mu_k (E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}}) f\right)\\
&= \lim_{l\to 0}\sum_{k=1}^n \mu_k U\left((E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}}) f\right) = \lim_{l\to 0}\sum_{k=1}^n \mu_k \widehat{f}_{(\mu_{k-1},\mu_k]},
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\left\|\lambda \widehat{f}_{(\alpha,\beta]} - \sum_{k=1}^n \mu_k \widehat{f}_{(\mu_{k-1},\mu_k]}\right\|_\rho^2 &= \left\|\sum_{k=1}^n (\lambda-\mu_k)\widehat{f}_{(\mu_{k-1},\mu_k]}\right\|_\rho^2\\
&= \sum_{k=1}^n \int_{(\mu_{k-1},\mu_k]} |\lambda-\mu_k|^2 \left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda)\\
&\leqslant l^2 \int_{(\alpha,\beta]} \left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) \leqslant l^2 \|f\|^2,
\end{aligned}
$$

所以

$$
U\left(\int_\alpha^\beta \mu \mathrm{d}E_\mu f\right) = \lambda \widehat{f}_{(\alpha,\beta]}.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\left\|Tf - \int_\alpha^\beta \mu \mathrm{d}E_\mu f\right\|^2 &= \left\|U\left(Tf - \int_\alpha^\beta \mu \mathrm{d}E_\mu f\right)\right\|_\rho^2 = \left\|\lambda\widehat{f} - \lambda\widehat{f}_{(\alpha,\beta]}\right\|_\rho^2\\
&= \int_{(-\infty,\infty)\setminus(\alpha,\beta]} \lambda^2 \left|\widehat{f}(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\rho(\lambda) \to 0, \quad \alpha\to-\infty, \beta\to\infty,
\end{aligned}
$$

即 $\lim\limits_{\substack{\alpha\to-\infty,\\ \beta\to\infty}} \int_\alpha^\beta \mu \mathrm{d}E_\mu f = Tf.$

3.10　极限圆情形的谱与谱分解

考虑 Sturm-Liouville 微分算式

$$
M = -DpD + q, \quad x\in[0,\infty),
$$

其中, p, q 是实的, $p'\in AC_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$, $q\in C[0,\infty)$ 且 $p(x)>0$. 以 $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\theta(x,\lambda)$ 分别表示下列 Cauchy 问题的解

$$
\begin{cases} My = \lambda y,\\ y(0) = \sin\alpha,\\ p(0)y'(0) = -\cos\alpha, \end{cases}\qquad
\begin{cases} My = \lambda y,\\ y(0) = \cos\alpha,\\ p(0)y'(0) = \sin\alpha, \end{cases}\qquad 0\leqslant\alpha<\pi.
$$

由 Liouville 公式, $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\theta(x,\lambda)$ 的 Lagrange 双线性泛函满足

$$\begin{aligned}[\varphi(\cdot,\lambda),\theta(\cdot,\lambda)](x) &= p(x)W\left(\varphi(\cdot,\lambda),\overline{\theta(\cdot,\lambda)}\right)(x)\\ &= p(0)W\left(\varphi(\cdot,\lambda),\overline{\theta(\cdot,\lambda)}\right)(0)=1, \quad \forall\lambda\in\mathbf{R},\end{aligned}$$

假设 M 是极限圆的, 由 3.6 节知道, $D\subset\mathscr{D}(T_1(M))$ 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓定义域的充要条件是存在矩阵

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12}\\ l_{21} & l_{21}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12}\\ n_{21} & n_{21}\end{pmatrix},$$

使得

(1) $\operatorname{rank}\,(\boldsymbol{L}\ \ \boldsymbol{N})=2$;

(2) $\begin{vmatrix} l_{i1} & \overline{l_{j1}}\\ l_{i2} & \overline{l_{j2}}\end{vmatrix}=p(0)\begin{vmatrix} n_{i1} & \overline{n_{j1}}\\ n_{i2} & \overline{n_{j2}}\end{vmatrix},\quad i,j=1,2;$

(3) $D=\left\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,\middle|\,\boldsymbol{L}\begin{pmatrix} f(0)\\ f'(0)\end{pmatrix}+\boldsymbol{N}\begin{pmatrix}[f,\varphi(\cdot,\lambda)](\infty)\\ [f,\theta(\cdot,\lambda)](\infty)\end{pmatrix}=0\right\}$, 其中, λ 是实数.

这一节给出 $T_0(M)$ 的自伴延拓的谱分解.

引理 3.10.1 对任何 $\mu\in\mathbf{C}$ 和 $f\in L^2[0,\infty)$, 存在 $y\in\mathscr{D}(T_1(M))$, 使得 $\mu y-My=f$.

证明 $\varphi(x,\mu)$ 和 $\theta(x,\mu)$ 是 $My=\mu y$ 的两个线性无关的解, 对微分方程 $\mu y-My=f$ 用常数变易法可求得

$$y(x)=C_1\varphi(x,\mu)+C_2\theta(x,\mu)+\int_0^x(\varphi(t,\mu)\theta(x,\mu)-\varphi(x,\mu)\theta(t,\mu))f(t)\mathrm{d}t.$$

因为 M 是极限圆的, $\varphi(\cdot,\mu),\theta(\cdot,\mu)\in L^2[0,\infty)$, 而

$$\left|\int_0^x\varphi(t,\mu)f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\|\varphi(\cdot,\mu)\|\,\|f\|,$$

$$\left|\int_0^x\theta(t,\mu)f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\|\theta(\cdot,\mu)\|\,\|f\|,$$

所以 $y\in L^2[0,\infty)$ 且 $My=\mu y-f\in L^2[0,\infty)$, 故 $y\in\mathscr{D}(T_1(M))$.

设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 它的定义域是

$$\mathscr{D}(T)=\left\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,\middle|\,\boldsymbol{L}\begin{pmatrix} f(0)\\ f'(0)\end{pmatrix}+\boldsymbol{N}\begin{pmatrix}[f,\varphi(\cdot,\lambda)](\infty)\\ [f,\theta(\cdot,\lambda)](\infty)\end{pmatrix}=0\right\},$$

其中,

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$$

满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{L}\ \boldsymbol{N})=2$ 和

$$\begin{vmatrix} l_{i1} & \overline{l_{j1}} \\ l_{i2} & \overline{l_{j2}} \end{vmatrix}=p(0)\begin{vmatrix} n_{i1} & \overline{n_{j1}} \\ n_{i2} & \overline{n_{j2}} \end{vmatrix},$$

$i,j=1,2$

定理 3.10.1　记 $\Delta(\mu)$ 为行列式

$$\begin{vmatrix} l_{11}\sin\alpha-\dfrac{l_{12}\cos\alpha}{p(0)}+n_{11}(\mu-\lambda)\displaystyle\int_0^\infty\varphi(t,\mu)\varphi(t,\lambda)\mathrm{d}t+n_{12}\left(1+(\mu-\lambda)\displaystyle\int_0^\infty\varphi(t,\mu)\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t\right) & l_{11}\cos\alpha+\dfrac{l_{12}\sin\alpha}{p(0)}+n_{11}\left(-1+(\mu-\lambda)\displaystyle\int_0^\infty\varphi(t,\lambda)\theta(t,\mu)\mathrm{d}t\right)+n_{12}(\mu-\lambda)\displaystyle\int_0^\infty\theta(t,\mu)\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t \\ l_{21}\sin\alpha-\dfrac{l_{22}\cos\alpha}{p(0)}+n_{21}(\mu-\lambda)\displaystyle\int_0^\infty\varphi(t,\mu)\varphi(t,\lambda)\mathrm{d}t+n_{22}\left(1+(\mu-\lambda)\displaystyle\int_0^\infty\varphi(t,\mu)\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t\right) & l_{21}\cos\alpha+\dfrac{l_{22}\sin\alpha}{p(0)}+n_{21}\left(-1+(\mu-\lambda)\displaystyle\int_0^\infty\varphi(t,\lambda)\theta(t,\mu)\mathrm{d}t\right)+n_{22}(\mu-\lambda)\displaystyle\int_0^\infty\theta(t,\mu)\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t \end{vmatrix}.$$

如果 $\Delta(\mu)\neq 0$, 则

(1) $\mu\in\rho(T)$;

(2) 存在 $K\in L^2([0,\infty)\times[0,\infty))$, 使得 $(R(\mu,T)f)(x)=\displaystyle\int_0^\infty K(x,t)f(t)\mathrm{d}t,\ f\in L^2[0,\infty)$.

证明　(1) $\mu\in\rho(T)$.

为了证明 $\mu\in\rho(T)$, 由闭图定理, 只需证明 $\mu I-T$ 是 $\mathscr{D}(T)\to L^2[0,\infty)$ 的双射.

(1) $\mu I-T$ 是满射.

由引理 3.10.1, 对任何 $f\in L^2[0,\infty)$, 有 $y\in\mathscr{D}(T_1(M))$ 使得 $\mu y-My=f$, 下面证明可以在 $\mathscr{D}(T)$ 中取到 y. 为此, 要证明可以取到 C_1, C_2 使得引理 3.10.1 中的 y 满足 $\mathscr{D}(T)$ 的边条件

$$y(0)=C_1\sin\alpha+C_2\cos\alpha,\quad y'(0)=\frac{-C_1\cos\alpha+C_2\sin\alpha}{p(0)},$$

由 Green 公式有

$$\begin{aligned}[y,\varphi(\cdot,\lambda)](x)&=[y,\varphi(\cdot,\lambda)](0)+\int_0^x(\varphi(t,\lambda)My(t)-y(t)M\varphi(t,\lambda))\,\mathrm{d}t\\&=p(0)W(y,\varphi(\cdot,\lambda))(0)+\int_0^x[\varphi(t,\lambda)(\mu y(t)-f(t))-y(t)\lambda\varphi(t,\lambda)]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= -C_2 - \int_0^x \varphi(t,\lambda) f(t)\mathrm{d}t + (\mu-\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda)y(t)\mathrm{d}t,$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^x \varphi(t,\lambda)y(t)\mathrm{d}t =& C_1\int_0^x \varphi(t,\mu)\varphi(t,\lambda)\mathrm{d}t + C_2\int_0^x \varphi(t,\lambda)\theta(t,\mu)\mathrm{d}t \\ &+ \int_0^x \left(\int_0^t (\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu)-\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu)) f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\varphi(t,\lambda)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}[y,\varphi(\cdot,\lambda)](\infty) =& C_1(\mu-\lambda)\int_0^\infty \varphi(t,\mu)\varphi(t,\lambda)\mathrm{d}t \\ &+ C_2\left(-1+(\mu-\lambda)\int_0^\infty \varphi(t,\lambda)\theta(t,\mu)\mathrm{d}t\right) - \int_0^\infty \varphi(t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t \\ &+ (\mu-\lambda)\int_0^\infty \left(\int_0^t (\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu)-\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu)) f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\varphi(t,\lambda)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

同理, 可得

$$\begin{aligned}[y,\theta(\cdot,\lambda)](\infty) =& C_1\left(1+(\mu-\lambda)\int_0^\infty \varphi(t,\mu)\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t\right) \\ &+ C_2(\mu-\lambda)\int_0^\infty \theta(t,\mu)\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t - \int_0^\infty \theta(t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t \\ &+ (\mu-\lambda)\int_0^\infty \left(\int_0^t (\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu)-\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu)) f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\theta(t,\lambda)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这样边条件就变成

$$\begin{aligned}& C_1\Bigg(l_{i1}\sin\alpha - l_{i2}\frac{\cos\alpha}{P(0)} + n_{i1}(\mu-\lambda)\int_0^\infty \varphi(t,\mu)\varphi(t,\lambda)\mathrm{d}t \\ & + n_{i2}(1+(\mu-\lambda)\int_0^\infty \varphi(t,\mu)\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t\Bigg) \\ & + C_2\Bigg(l_{i1}\cos\alpha + l_{i2}\frac{\sin\alpha}{p(0)} + n_{i1}\left(-1+(\mu-\lambda)\int_0^\infty \varphi(t,\lambda)\theta(t,\mu)\mathrm{d}t\right) \\ & + n_{i2}(\mu-\lambda)\int_0^\infty \theta(t,\mu)\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t\Bigg) \\ =& n_{i1}\Bigg(\int_0^\infty \varphi(t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t - (\mu-\lambda)\int_0^\infty \\ & \cdot\left(\int_0^t (\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu)-\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu)) f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\varphi(t,\lambda)\mathrm{d}t\Bigg) \\ & + n_{i2}\Bigg(\int_0^\infty \theta(t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t - (\mu-\lambda)\int_0^\infty \\ & \cdot\left(\int_0^t (\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu)-\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu)) f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t\Bigg),\end{aligned}$$

$i=1,2$. 由于 $\Delta(\mu)\neq 0$, 可唯一解得 C_1, C_2, 使 y 满足 $\mathscr{D}(T)$ 的边条件, 所以 $\mu I-T$ 是满射.

(ii) $\mu I-T$ 是单射.

如果 $(\mu I-T)y=0$, $y\in\mathscr{D}(T)$, 则上面的式子右端为 0, 方程只有零解 $C_1=C_2=0$. 由引理 3.10.1 中解的表达式, $y=0$.

(2) 存在 $K(x,t)$, 使得 $(R(\mu,T)f)(x)=\displaystyle\int_0^\infty K(x,t)f(t)\mathrm{d}t,\quad f\in L^2[0,\infty)$.

从前面边条件的方程组可以解出

$$\begin{aligned}C_i=&a_{i1}\int_0^\infty\varphi(t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t+a_{i2}\int_0^\infty\theta(t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t\\&+a_{i3}\int_0^\infty\left(\int_0^t(\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu)-\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu))f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\varphi(t,\lambda)\mathrm{d}t\\&+a_{i4}\int_0^\infty\left(\int_0^t(\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu)-\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu))f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t,\quad i=1,2.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^t|\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu)-\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu)|\,|f(\tau)|\,|\varphi(t,\lambda)|\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\\leqslant&\int_0^\infty\int_0^t(|\varphi(\tau,\mu)f(\tau)||(\varphi(t,\mu)\theta(t,\mu)|+|\theta(\tau,\mu)f(\tau)||\varphi(t,\mu)\varphi(t,\lambda)|)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\\leqslant&\left(\int_0^\infty|\varphi(\tau,\mu)f(\tau)|\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_0^\infty|\varphi(t,\lambda)\,\theta(t,\mu)|\mathrm{d}t\right)\\&+\left(\int_0^\infty|\theta(\tau,\mu)f(\tau)|\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_0^\infty|\varphi(t,\mu)\varphi(t,\lambda)|\mathrm{d}t\right)\\\leqslant&2\,\|\varphi(\cdot,\mu)\|\,\|\varphi(\cdot,\lambda)\|\,\|\theta(\cdot,\mu)\|\,\|f\|,\end{aligned}$$

利用 Fubini 定理可以交换积分次序, 故

$$\begin{aligned}C_i=&a_{i1}\int_0^\infty\varphi(t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t+a_{i2}\int_0^\infty\theta(t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t\\&+a_{i3}\int_0^\infty\left(\int_\tau^\infty(\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu)-\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu))\varphi(t,\lambda)\mathrm{d}t\right)f(\tau)\mathrm{d}\tau\\&+a_{i4}\int_0^\infty\left(\int_\tau^\infty(\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu)-\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu))\theta(t,\lambda)\mathrm{d}t\right)f(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad i=1,2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_1(x,t)=&\varphi(x,\mu)(a_{11}\varphi(t,\lambda)+a_{12}\theta(t,\lambda)+\int_t^\infty(\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu)-\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu))\\&\cdot(a_{13}\varphi(\tau,\lambda)+a_{14}\theta(\tau,\lambda))\,\mathrm{d}\tau)+\theta(x,\mu)(a_{21}\varphi(t,\lambda)+a_{22}\theta(t,\lambda)\mathrm{d}\tau\\&+\int_t^\infty(\varphi(t,\mu)\theta(\tau,\mu)-\varphi(\tau,\mu)\theta(t,\mu))\,(a_{23}\varphi(\tau,\lambda)+a_{24}\theta(\tau,\lambda))\,\mathrm{d}\tau)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=a_{11}\varphi(x,\mu)\varphi(t,\lambda)+a_{12}\varphi(x,\mu)\theta(t,\lambda)+a_{21}\theta(x,\mu)\varphi(t,\lambda)\\
&\quad+a_{22}\theta(x,\mu)\theta(t,\lambda)+b_{11}(t)\varphi(x,\mu)\varphi(t,\mu)+b_{12}(t)\varphi(x,\mu)\theta(t,\mu)\\
&\quad+b_{21}(t)\theta(x,\mu)\varphi(t,\lambda)+b_{22}(t)\theta(x,\mu)\theta(t,\mu),
\end{aligned}
$$

其中,

$$b_{11}(t)=\int_t^{\infty}\theta(\tau,\mu)\left(a_{13}\varphi(\tau,\lambda)+a_{14}\theta(\tau,\lambda)\right)\mathrm{d}\tau,$$

$$b_{12}(t)=-\int_t^{\infty}\varphi(\tau,\mu)\left(a_{13}\varphi(\tau,\lambda)+a_{14}\theta(\tau,\lambda)\right)\mathrm{d}\tau,$$

$$b_{21}(t)=\int_t^{\infty}\theta(\tau,\mu)\left(a_{23}\varphi(\tau,\lambda)+a_{24}\theta(\tau,\lambda)\right)\mathrm{d}\tau,$$

$$b_{22}(t)=-\int_t^{\infty}\varphi(\tau,\mu)\left(a_{23}\varphi(\tau,\lambda)+a_{24}\theta(\tau,\lambda)\right)\mathrm{d}\tau,$$

$$K_2(x,t)=\begin{cases}\varphi(t,\mu)\theta(x,\mu)-\varphi(x,\mu)\theta(t,\mu), & 0\leqslant t\leqslant x,\\ 0, & x<t<\infty,\end{cases}$$

则

$$y(x)=\int_0^{\infty}K(x,t)f(t)\mathrm{d}t,$$

其中,

$$K(x,t)=K_1(x,t)+K_2(x,t).$$

(3) $K\in L^2([0,\infty)\times[0,\infty))$.

注意到

$$
\begin{aligned}
|b_{i1}(t)|&=\left|\int_t^{\infty}\theta(\tau,\mu)\left(a_{i3}\varphi(\tau,\lambda)+a_{i4}\theta(\tau,\lambda)\right)\mathrm{d}\tau\right|\\
&\leqslant|a_{i3}|\,\|\varphi(\cdot,\lambda)\|\,\|\theta(\cdot,\mu)\|+|a_{i4}|\,\|\theta(\cdot,\mu)\|\,\|\theta(\cdot,\lambda)\|,\\
|b_{i2}(t)|&\leqslant|a_{i3}|\,\|\varphi(\cdot,\mu)\|\,\|\varphi(\cdot,\lambda)\|+|a_{i4}|\,\|\varphi(\cdot,\mu)\|\,\|\theta(\cdot,\lambda)\|
\end{aligned}
$$

都是 t 的有界函数, 所以 $K_1\in L^2([0,\infty)\times[0,\infty))$. 而

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|K_2(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\leqslant\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|\varphi(t,\mu)\theta(x,\mu)-\varphi(x,\mu)\theta(t,\mu)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(|\varphi(t,\mu)\theta(x,\mu)|^2+|\varphi(x,\mu)\theta(t,\mu)|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=4\,\|\varphi(\cdot,\mu)\|^2\,\|\theta(\cdot,\mu)\|^2,
\end{aligned}
$$

故得 $K\in L^2([0,\infty)\times[0,\infty))$, 定理证毕.

推论 3.10.1 T 有纯点谱, $\sigma(T)=\{\mu\,|\,\Delta(\mu)=0\}$, 特征值没有有限聚点.

证明 因为 $\Delta(\mu)$ 是 μ 的整函数, 所以特征值没有有限聚点.

推论 3.10.2 T 的规范化特征函数组成了 $L^2[0,\infty)$ 的规范正交基.

证明 如果 $\mu \in \rho(T) \cap \mathbf{R}$, 则 $\mu I - T$ 是自伴的. 对任何 $u, \nu \in L^2[0,\infty)$, 存在 $f, g \in \mathscr{D}(T)$, 使得

$$(\mu I - T)f = u, \quad (\mu I - T)g = \nu.$$

因此

$$(R(\mu,T)u,\nu) = (f,(\mu I - T)g) = ((\mu I - T)f, g) = (u, R(\mu,T)\nu),$$

这表明 $R(\mu,T)$ 是紧自伴算子. 此外,

λ_n 是 T 的特征值, 相应的规范化特征函数是 $\varphi_n(x)$

$\Leftrightarrow \mu - \lambda_n$ 是 $\mu I - T$ 的特征值, 相应的规范化特征函数是 $\varphi_n(x)$

$\Leftrightarrow (\mu I - T)y = (\mu - \lambda_n)y$ 有非零解 φ_n, $\|\varphi_n\| = 1$

$\Leftrightarrow R(\mu,T)y = \dfrac{1}{\mu - \lambda_n}y$ 有非零解 φ_n, $\|\varphi_n\| = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\mu - \lambda_n}$ 是 $R(\mu,T)$ 的特征值, 相应的规范化特征函数是 $\varphi_n(x)$.

由于 0 不是 $R(\mu,T)$ 的特征值, 所以 $\{\varphi_n | n = 1,2,\cdots\}$ 组成了 $L^2[0,\infty)$ 的规范正交基.

推论 3.10.3 设 $\sigma(T) = \{\lambda_n | n = 1,2,\cdots\}$, 与 λ_n 对应的规范化特征函数记为 φ_n. 令

$$P_\lambda f = \sum_{\lambda \leqslant \lambda_n} (f,\varphi_n)\varphi_n, \quad f \in L^2[0,\infty), \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

则 $\{P_\lambda | -\infty < \lambda < \infty\}$ 是 T 的谱族.

证明 主要是证明

$$Tf = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mathrm{d}P_\lambda f = \sum_n \lambda_n (f,\varphi_n)\varphi_n, \quad f \in \mathscr{D}(T).$$

设 $f \in \mathscr{D}(T)$, 记 $u = (\mu I - T)f$, 那么

$$\begin{aligned}(\mu I - T)f = u &= \sum_n (u,\varphi_n)\varphi_n = \sum_n ((\mu I - T)f, \varphi_n)\varphi_n \\ &= \mu \sum_n (f,\varphi_n)\varphi_n - \sum_n (Tf,\varphi_n)\varphi_n = \mu \sum_n (f,\varphi_n)\varphi_n - \sum_n \lambda_n (f,\varphi_n)\varphi_n.\end{aligned}$$

由于 $f = \sum\limits_n (f,\varphi_n)\varphi_n$, 故 $Tf = \sum\limits_n \lambda_n (f,\varphi_n)\varphi_n$.

3.11 两端均为奇异的情形

考虑 $(-\infty,\infty)$ 上定义的微分算式

$$M=-DpD+q,\quad x\in(-\infty,\infty),$$

这里 $p>0,\ p'\in AC_{\rm loc}(-\infty,\infty),\ q\in L_{\rm loc}(-\infty,\infty)$ 且为实值函数. $y(x,z)$ 表示微分方程 $My=zy$ 的解, 由于 p,q 是实值的, 所以当 z 为实数时, 可以要求 $y(x,z)$ 也是实的. 设 φ 和 θ 分别是微分方程 $My=zy$ 满足 Cauchy 条件

$$\begin{cases}\varphi(0,z)=\sin\alpha,\\ p(0)\varphi'(0,z)=-\cos\alpha,\end{cases}\quad \begin{cases}\theta(0,z)=\cos\alpha,\\ p(0)\theta'(0,z)=\sin\alpha,\end{cases}\quad 0\leqslant\alpha<\pi$$

的解, 显然 φ 和 θ 是 z 的整函数, 线性无关.

$$p(x)W(\varphi,\theta)(x)=p(0)W(\varphi,\theta)(0)=1,$$

即

$$\left[\varphi,\overline{\theta}\right](x)=1.$$

首先讨论 $T_0(M)$ 的亏指数. 设 $(-\infty,0]$ 和 $[0,\infty)$ 上的 Weyl 解分别是

$$\psi_-(x,z)=\varphi(x,z)+M_-(z)\theta(x,z),$$

$$\psi_+(x,z)=\varphi(x,z)+M_+(z)\theta(x,z).$$

引理 3.11.1 设 $\mathrm{Im}z\neq 0$, 则

$$\int_{-\infty}^0|\psi_-(x,z)|^2\,\mathrm{d}x+\int_0^\infty|\psi_+(x,z)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{Im}\,(M_+(z)-M_-(z))}{\mathrm{Im}z}.$$

证明 设 $a<0$, 以

$$\psi_a(x,z)=\varphi(x,z)+m_a(z)\theta(x,z)$$

表示微分方程 $My=zy$ 的解, 它在零点满足边条件

$$\cos\alpha y(0)+\sin\alpha p(0)y'(0)=m_a(z),$$

而在 a 点满足与 z 无关的边条件

$$\cos\beta y(a)+\sin\beta p\,(a)\,y'(a)=0,\quad 0\leqslant\beta<\pi.$$

从这里可得

$$\cos\beta\varphi(a,z)+\sin\beta p(a)\varphi'(a,z)+m_a(z)\left(\cos\beta\theta(a,z)+\sin\beta p(a)\theta'(a,z)\right)=0,$$

$$m_a(z)=-\frac{\cos\beta\varphi(a,z)+\sin\beta p(a)\varphi'(a,z)}{\cos\beta\theta(a,z)+\sin\beta p(a)\theta'(a,z)},$$

这就是 $[a,0]$ 的 Weyl 函数, 而 $\psi_a(x,z)$ 是 $[a,0]$ 的 Weyl 解. 因为 a 点边条件与 z 无关, 所以由

$$\begin{cases}\cos\beta\psi_a(a,z)+\sin\beta p(a)\psi_a'(a,z)=0,\\ \cos\beta\psi_a(a,z')+\sin\beta p(a)\psi_a'(a,z')=0\end{cases}$$

得

$$\left[\psi_a(\cdot,z),\overline{\psi_a(\cdot,z')}\right](a)=0.$$

这样由 Green 公式便得

$$\begin{aligned}&(z-z')\int_a^0\psi_a(x,z)\psi_a(x,z')\mathrm{d}x\\ =&\int_a^0\left(\psi_a(x,z')M\psi_a(x,z)-\psi_a(x,z)M\psi_a(x,z')\right)\mathrm{d}x\\ =&\left[\psi_a(\cdot,z),\overline{\psi_a(\cdot,z')}\right]_a^0=\left[\psi_a(\cdot,z),\overline{\psi_a(\cdot,z')}\right](0)\\ =&\left[\varphi(\cdot,z)+m_a(z)\theta(\cdot,z),\overline{\varphi(\cdot,z')+m_a(z')\theta(\cdot,z')}\right](0)\\ =&m_a(z)\left[\theta(\cdot,z),\overline{\varphi(\cdot,z')}\right](0)+m_a(z')\left[\varphi(\cdot,z),\overline{\theta(\cdot,z')}\right](0)\\ =&m_a(z')-m_a(z).\end{aligned}$$

取一个数列 $\{a_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ 且

$$\lim_{n\to\infty}m_{a_n}(z)=M_-(z),$$

则当 $\mathrm{Im}z\neq0$, $\mathrm{Im}z'\neq0$ 时可得

$$(z-z')\int_{-\infty}^0\psi_-(x,z)\psi_-(x,z')\mathrm{d}x=M_-(z')-M_-(z).$$

令 $z'=\overline{z}$ 便有

$$\int_{-\infty}^0|\psi_-(x,z)|^2\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{Im}M_-(z)}{\mathrm{Im}z}.$$

同样, 设 $b>0$, 以

$$\psi_b(x,z)=\varphi(x,z)+m_b(z)\theta(x,z)$$

表示微分方程 $My = zy$ 满足边条件

$$\cos\alpha y(0) + \sin\alpha p(0)y'(0) = m_b(z),$$

$$\cos\gamma y(b) + \sin\gamma p(b)y'(b) = 0$$

的解, 其中,

$$m_b(z) = -\frac{\cos\gamma\varphi(b,z) + \sin\gamma p(b)\varphi'(b,z)}{\cos\gamma\theta(b,z) + \sin\gamma p(b)\theta'(b,z)}$$

是 $[0,b]$ 的 Weyl 函数, 而 $\psi_b(x,z)$ 是 $[0,b]$ 的 Weyl 解. 由于 b 点的边条件与 z 无关, 所以

$$[\psi_b(\cdot,z), \overline{\psi_b(\cdot,z')}](b) = 0.$$

由 Green 公式,

$$\begin{aligned}
&(z-z')\int_0^b \psi_b(x,z)\psi_b(x,z')\mathrm{d}x \\
=&\int_0^b (\psi_b(x,z')M\psi_b(x,z) - \psi_b(x,z)M\psi_b(x,z'))\mathrm{d}x \\
=&[\psi_b(\cdot,z), \overline{\psi_b(\cdot,z')}]_0^b = -[\psi_b(\cdot,z), \overline{\psi_b(\cdot,z')}](0) \\
=&-[\varphi(\cdot,z) + m_b(z)\theta(\cdot,z), \overline{\varphi(\cdot,z') + m_b(z')\theta(\cdot,z')}](0) \\
=&-m_b(z)[\theta(\cdot,z), \overline{\varphi(\cdot,z')}](0) - m_b(z')[\varphi(\cdot,z), \overline{\theta(\cdot,z')}](0) \\
=&m_b(z) - m_b(z').
\end{aligned}$$

取一数列 $\{b_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ 且

$$\lim_{n\to\infty} m_{b_n}(z) = M_+(z),$$

则当 $\mathrm{Im}z \neq 0$, $\mathrm{Im}z' \neq 0$ 时,

$$(z-z')\int_0^\infty \psi_+(x,z)\psi_+(x,z')\mathrm{d}x = M_+(z) - M_+(z').$$

令 $z' = \overline{z}$ 便有

$$\int_0^\infty |\psi_+(x,z)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Im}M_+(z)}{\mathrm{Im}z},$$

故

$$\int_{-\infty}^0 |\psi_-(x,z)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty |\psi_+(x,z)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Im}(M_+(z) - M_-(z))}{\mathrm{Im}z}.$$

引理 3.11.2 设 $\mathrm{Im}z \neq 0$, 则 $\psi_+(x,z)$ 和 $\psi_-(x,z)$ 为 $My = zy$ 的线性无关解.

证明

$$\begin{aligned}[\psi_-,\overline{\psi_+}](0)&=[\varphi(\cdot,z)+M_-(z)\theta(\cdot,z),\overline{\varphi(\cdot,z)+M_+(z)\theta(\cdot,z)}](0)\\&=M_-(z)[\theta(\cdot,z),\overline{\varphi(\cdot,z)}](0)+M_+(z)[\varphi(\cdot,z),\overline{\theta(\cdot,z)}](0)\\&=M_+(z)-M_-(z).\end{aligned}$$

因为

$$\mathrm{Im}(M_+(z)-M_-(z))=\mathrm{Im}z\left(\int_{-\infty}^{0}|\psi_-(x,z)|^2\,\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}|\psi_+(x,z)|^2\,\mathrm{d}x\right)\neq 0,$$

所以

$$[\psi_-,\overline{\psi_+}](0)\neq 0,$$

从而

$$W(\psi_-,\psi_+)(0)=\frac{1}{p(0)}[\psi_-,\overline{\psi_+}](0)\neq 0,$$

$\psi_+(x,z)$ 与 $\psi_-(x,z)$ 线性无关.

设 M 在 $-\infty(\infty)$ 处的亏指数为 $(n_-,n_-)(n_+,n_+)$, 由 Weyl 的分类定理, $n_-,n_+=1$ 或 2, 可能出现 4 种情况 (表 3.1).

表 3.1

	I	II	III	IV
$-\infty$	2	2	1	1
∞	2	1	2	1

定理 3.11.1 (Kodaira 公式) 设 $\mathrm{Im}z\neq 0$, 则 $My=zy$ 属于 $L^2(-\infty,\infty)$ 的解的个数为 $n=n_-+n_+-2$.

证明 情形 I $My=zy$ 的任何解均平方可积, 所以 $n=2$.

$$2=2+2-2.$$

情形 II $My=zy$ 属于 $L^2(-\infty,\infty)$ 的解一定是 $\psi_+(x,z)$ 的倍数, 因为 $\theta\overline{\in}L^2(-\infty,\infty)$, 所以若有非零的 $c_1\varphi+c_2\theta\in L^2(-\infty,\infty)$, 则 $c_1\neq 0$. 于是

$$\varphi+c_3\theta\in L^2(-\infty,\infty),$$

那么 $c_3=M_+(z)$, 否则将有 $\theta\in L^2(-\infty,\infty)$, 矛盾! 这样便得 $n=1$,

$$1=2+1-2.$$

情形 III 与情形 II 相同.

情形 IV 这时 $n=0$, 即方程无平方可积解. 若不然, 则有一解 $y(x)$ 同时在 $(-\infty,0]$ 和 $[0,\infty)$ 上平方可积, 那么

$$y(x)=\begin{cases} c_1\psi_-(x,z), & x\in(-\infty,0], \\ c_2\psi_+(x,z), & x\in[0,\infty), \end{cases}$$

于是 ψ_- 与 ψ_+ 线性相关, 与引理 3.11.2 矛盾! 故 $0=1+1-2$.

推论 3.11.1 $T_0(M)$ 的亏指数分别如表 3.2 所示.

表 3.2

情形 I	情形 II 或情形 III	情形 IV
(2, 2)	(1, 1)	(0, 0)

下面考虑 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 根据推论 3.11.1, $T_0(M)$ 的自伴延拓是 $\mathscr{D}(T_1(M))$ 在所加边条件下的限制, 边条件的个数如表 3.3 所示.

表 3.3

情形 I	情形 II	情形 III	情形 IV
2	1	1	0

对于情形 IV, $T_0(M)$ 本身就是自伴算子. 对于情形 II 或情形 III, 假设 $-\infty$ 处为极限点而 ∞ 处为极限圆. 这时

$$\psi_+(x,z),\overline{\theta(x,z)}\in L^2[0,\infty).$$

设 $0<a<b$, 可以造一个 C^∞ 函数 $\alpha(x)$, 如图 3.11 所示.

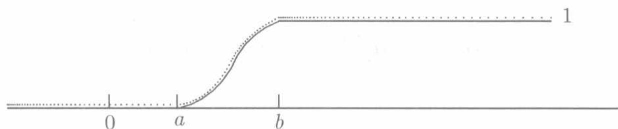


图 3.11

这件事可以这样做: 注意到

$$\rho(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases}\in C^\infty(\mathbf{R}),$$

取 $\delta<\dfrac{b-a}{2}$, 令

$$\widetilde{\alpha}(x)=\frac{\rho(\delta^2-(x-b)^2)}{\rho(\delta^2-(x-b)^2)+\rho\left((x-b)^2-\dfrac{\delta^2}{4}\right)},$$

由于分母从不为零, $\widetilde{\alpha} \in C^{\infty}(\mathbf{R})$. 而

$$\widetilde{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & |x-b| \geqslant \delta, \\ 1, & |x-b| < \dfrac{\delta}{2}, \end{cases}$$

修改 $\widetilde{\alpha}$, 使得 $x \geqslant b + \dfrac{\delta}{2}$ 时, 函数值都取 1, 则得所要的 C^{∞} 函数 $\alpha(x)$ 如图 3.12 所示.

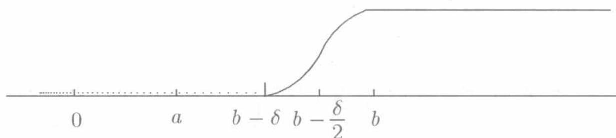


图 3.12

取

$$u = \alpha\psi_+, \quad \nu = \alpha\overline{\theta},$$

则 $u, \nu \in \mathscr{D}(T_1(M))$.

(1) $u \notin \mathscr{D}(T_0(M))$.

因为

$$\begin{aligned}\langle u, \nu\rangle &= [u,\nu]_{-\infty}^{\infty} = [u,\nu](\infty) = [\psi_+, \overline{\theta}](\infty) = [\varphi + M_+\theta, \overline{\theta}](\infty) \\ &= \lim_{x\to\infty}[\varphi, \overline{\theta}](x) = \lim_{x\to\infty} p(x)W(\varphi,\theta)(x) = 1 \neq 0.\end{aligned}$$

这样 u 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关.

(2) $\langle u, u\rangle = [u,u]_{-\infty}^{\infty} = [\psi_+, \psi_+](\infty) = 0$.

(3) $D = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) | \langle f, u\rangle = 0\}$ 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓的定义域.

$$\langle f, u\rangle = 0 \Leftrightarrow [f,u]_{-\infty}^{\infty} = 0 \Leftrightarrow [f, \psi_+](\infty) = 0,$$

所以

$$D = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \,|\, [f, \psi_+](\infty) = 0\},$$

其中, $\psi_+(x,z) = \varphi(x,z) + M_+(z, \widehat{m}_{\infty}(z_0))\theta(x,z)$, $\mathrm{Im} z_0 \neq 0$. 这种自伴延拓称为 $T_0(M)$ 的 Weyl-Titchmarsh 自伴延拓.

对情形 I, 取 u, ν 如图 3.13 所示,

则 $u, \nu \in \mathscr{D}(T_1(M))$.

(1) u, ν 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关.

因为 $\varphi, \theta \in \mathscr{D}(T_1(M))$, 而

$$\begin{aligned}\langle u, \overline{\theta}\rangle &= [u, \overline{\theta}]_{-\infty}^{\infty} = [\psi_+, \overline{\theta}](\infty) = \lim_{x\to\infty}[\psi_+, \overline{\theta}](x) \\ &= \lim_{x\to\infty} p(x)W(\varphi,\theta)(x) = 1 \neq 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \nu, \overline{\varphi} \rangle &= [\nu, \overline{\varphi}]_{-\infty}^{\infty} = -[\psi_-, \overline{\varphi}](-\infty) = -\lim_{x\to-\infty}[\psi_-, \overline{\varphi}](x)\\ &= -M_-(z)\lim_{x\to-\infty} p(x)W(\theta, \varphi)(x) = M_-(z) \neq 0,\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \langle u, \overline{\varphi} \rangle & \langle u, \overline{\theta} \rangle \\ \langle \nu, \overline{\varphi} \rangle & \langle \nu, \overline{\theta} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -M_+(z) & 1 \\ M_-(z) & -1 \end{vmatrix} = M_+(z) - M_-(z) \neq 0,$$

所以 u, ν 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关.

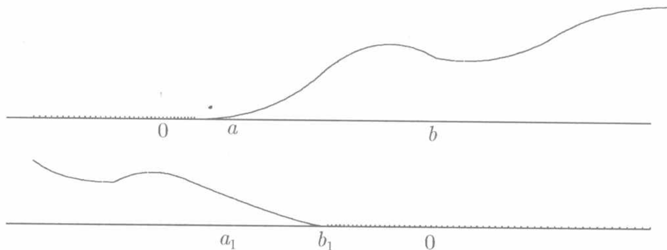


图 3.13

(2)

$$\langle u, u \rangle = [\psi_+, \psi_+](\infty) = 0,$$

$$\langle v, \nu \rangle = -[\psi_-, \psi_-](-\infty) = 0,$$

$$\langle u, \nu \rangle = [u, \nu]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

(3) $D = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \,|\, \langle f, u \rangle = \langle f, \nu \rangle = 0\}$ 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓的定义域. 可是

$$\langle f, u \rangle = 0 \Leftrightarrow [f, \psi_+](\infty) = 0, \qquad \langle f, \nu \rangle = 0 \Leftrightarrow [f, \psi_-](-\infty) = 0,$$

故

$$D = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \,|\, [f, \psi_+](\infty) = 0 = [f, \psi_-](-\infty)\},$$

其中,

$$\begin{aligned}\psi_+(x, z) &= \varphi(x, z) + M_+(z, \widehat{m}_\infty(z_0))\theta(x, z),\\ \psi_-(x, z) &= \varphi(x, z) + M_-(z, \widehat{m}_{-\infty}(z_0))\theta(x, z),\end{aligned} \qquad \mathrm{Im} z_0 \neq 0.$$

这种自伴延拓也称为 $T_0(M)$ 的 Weyl-Titchmarsh 自伴延拓. $T_0(M)$ 的一般的自伴延拓的形式见文献 [7]. 接下来讨论特征展开与谱分解.

设 φ, θ 是微分方程满足下述 Cauchy 条件的解:

$$\begin{cases} \varphi(0, z) = 1, \\ p(0)\varphi'(0, z) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta(0, z) = 0, \\ p(0)\theta'(0, z) = 1, \end{cases}$$

则 φ, θ 线性无关且由 Liouville 公式得

$$p(x)W(\varphi,\theta)(x)=1.$$

记 $\Delta=[a,b]$, 设 $0\in(a,b)$, $M_\Delta=M|_\Delta$, 考虑 $T_0(M_\Delta)$ 的自伴延拓 T_Δ

$$\mathscr{D}(T_\Delta)=\left\{y\in\mathscr{D}(T_1(M_\Delta))\,\middle|\,\begin{array}{l}\cos\beta y(a)+\sin\beta p(a)y'(a)=0,\\ \cos\gamma y(b)+\sin\gamma p(b)y'(b)=0\end{array}\right\},$$

这里 $\beta,\gamma\in[0,\pi)$. 设 T_Δ 的特征值是 $\{\lambda_{\Delta n}|n=1,2,\cdots\}$, 与 $\lambda_{\Delta n}$ 对应的规范化特征函数是 $h_{\Delta n}$, 则

$$h_{\Delta n}=r_{\Delta n1}\varphi(x,\lambda_{\Delta n})+r_{\Delta n2}\theta(x,\lambda_{\Delta n}).$$

因为 $h_{\Delta n}$, φ 和 θ 都是实的, 所以 $r_{\Delta n1}, r_{\Delta n2}$ 可以取成实的. 由 Parseval 等式, 对任意的 $f\in L^2(\Delta)$, 有

$$\begin{aligned}\int_\Delta|f(x)|^2\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_\Delta f(x)h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x\right|^2\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_\Delta f(x)(r_{\Delta n1}\varphi(x,\lambda_{\Delta n})+r_{\Delta n2}\theta(x,\lambda_{\Delta n}))\mathrm{d}x\right|^2\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(r_{\Delta n1}\int_\Delta f(x)\varphi(x,\lambda_{\Delta n})\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.+r_{\Delta n2}\int_\Delta f(x)\theta(x,\lambda_{\Delta n})\mathrm{d}x\right)\left(r_{\Delta n1}\int_\Delta\overline{f(x)}\varphi(x,\lambda_{\Delta n})\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.+r_{\Delta n2}\int_\Delta\overline{f(x)}\theta(x,\lambda_{\Delta n})\mathrm{d}x\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(r_{\Delta n1}^2g_{\Delta1}(\lambda_{\Delta n})\overline{g_{\Delta1}(\lambda_{\Delta n})}+r_{\Delta n1}g_{\Delta1}(\lambda_{\Delta n})r_{\Delta n2}\overline{g_{\Delta2}(\lambda_{\Delta n})}\\
&\quad+r_{\Delta n1}\overline{g_{\Delta1}(\lambda_{\Delta n})}r_{\Delta n2}g_{\Delta2}(\lambda_{\Delta n})+r_{\Delta n2}^2g_{\Delta2}(\lambda_{\Delta n})\overline{g_{\Delta2}(\lambda_{\Delta n})}),\end{aligned}$$

其中,

$$g_{\Delta1}(\lambda)=\int_\Delta f(x)\varphi(x,\lambda)\mathrm{d}x,\quad g_{\Delta2}(\lambda)=\int_\Delta f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x,$$

这样

$$\begin{aligned}\int_\Delta|f(x)|^2\mathrm{d}x=&\int_{-\infty}^{\infty}|g_{\Delta1}(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\rho_{\Delta11}(x)+g_{\Delta1}(\lambda)\overline{g_{\Delta2}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{\Delta21}(\lambda)\\
&+\overline{g_{\Delta1}(\lambda)}g_{\Delta2}(\lambda)\mathrm{d}\rho_{\Delta12}(\lambda)+|g_{\Delta2}(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\rho_{\Delta22}(\lambda).\end{aligned}$$

这里 $\rho_{\varDelta jk}$ 都是 $(-\infty,\infty)$ 上的阶梯函数, 其间断点为 $\lambda_{\varDelta n}$, 跃度是

$$\rho_{\varDelta jk}(\lambda_{\varDelta n}+0)-\rho_{\varDelta jk}(\lambda_{\varDelta n}-0)=\sum_{\{m|\lambda_{\varDelta m}=\lambda_{\varDelta n}\}} r_{\varDelta mj}r_{\varDelta mk}$$

($\lambda_{\varDelta n}$ 可以是若干重数的!).

注 $\rho_{\varDelta}=\begin{pmatrix}\rho_{\varDelta 11} & \rho_{\varDelta 12}\\ \rho_{\varDelta 21} & \rho_{\varDelta 22}\end{pmatrix}$ 产生一个测度,

$$L^2(\rho_{\varDelta})=\left\{\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix}\middle|\ \|g\|^2=(g,g)_{\rho_{\varDelta}}=\int_{-\infty}^{\infty}(\overline{g_1},\overline{g_2})\begin{pmatrix}\mathrm{d}\rho_{\varDelta 11} & \mathrm{d}\rho_{\varDelta 12}\\ \mathrm{d}\rho_{\varDelta 21} & \mathrm{d}\rho_{\varDelta 22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix}<\infty\right\},$$

$$f\in L^2(\varDelta)\underset{\sigma}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}g_{\varDelta 1}\\ g_{\varDelta 2}\end{pmatrix}\in L^2(\rho_{\varDelta}),$$

σ 是等距线性算子! 其中,

$$g_{\varDelta 1}(\lambda)=\int_{\varDelta} f(x)\varphi(x,\lambda)\mathrm{d}x,\quad g_{\varDelta 2}(\lambda)=\int_{\varDelta} f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x.$$

这样得到的矩阵

$$\boldsymbol{\rho}_{\varDelta}=\begin{pmatrix}\rho_{\varDelta 11} & \rho_{\varDelta 12}\\ \rho_{\varDelta 21} & \rho_{\varDelta 22}\end{pmatrix}$$

称为 $T_{\varDelta}$ 的谱矩阵. 可以利用下面的条件将 $\rho_{\varDelta}$ 标准化

$$\boldsymbol{\rho}_{\varDelta}(0)=0,\quad \boldsymbol{\rho}_{\varDelta}(a+0)=\boldsymbol{\rho}_{\varDelta}(\lambda).$$

谱矩阵 $\boldsymbol{\rho}_{\varDelta}$ 有下列性质:

(1) $\boldsymbol{\rho}_{\varDelta}$ 是 Hermite 矩阵 (实际上它是对称矩阵, 因为 $\rho_{\varDelta 21}=\rho_{\varDelta 12}$);

(2) 在任何有限区间上, $\rho_{\varDelta jk}$ 都是有界变差的 (即局部有界变差, 因为 $\rho_{\varDelta jk}$ 是阶梯函数);

(3) 如果 $\delta=(\mu,\nu]$, $\mu<\nu$, 则 $\boldsymbol{\rho}_{\varDelta}(\delta)=\boldsymbol{\rho}_{\varDelta}(\nu)-\boldsymbol{\rho}_{\varDelta}(\mu)$ 是非负定的.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_{\varDelta}(\delta)&=(\rho_{\varDelta jk}(\nu)-\rho_{\varDelta jk}(\mu))_{1\leqslant j,k\leqslant 2}\\ &=\left(\sum_{\mu<\lambda_{\varDelta m}\leqslant\nu} r_{\varDelta mj}\cdot r_{\varDelta mk}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant 2}\\ &=\begin{pmatrix}\sum\limits_{(\mu,\nu]} r_{\varDelta m1}^2 & \sum\limits_{(\mu,\nu]} r_{\varDelta m1}r_{\varDelta m2}\\ \sum\limits_{(\mu,\nu]} r_{\varDelta m1}r_{\varDelta m2} & \sum\limits_{(\mu,\nu]} r_{\varDelta m2}^2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{(\mu,\nu]} r_{\Delta m1}^2 \geqslant 0,$$

$$\left(\sum_{(\mu,\nu]} r_{\Delta m1} r_{\Delta m2}\right)^2 \leqslant \sum_{(\mu,\nu]} r_{\Delta m1}^2 \cdot \sum_{(\mu,\nu]} r_{\Delta m2}^2,$$

所以 $\boldsymbol{\rho}_\Delta(\delta)$ 是非负定的.

以上是有限区间上特征展开的新的表述. 要利用这种形式取极限, 让 $\Delta \to (-\infty,\infty)$, 来得到 $(-\infty,\infty)$ 情形下的特征展开. 为了能得到谱矩阵 $\boldsymbol{\rho} = \lim\limits_{\Delta\to(-\infty,\infty)} \boldsymbol{\rho}_\Delta$, 仿照 3.7 节的证明, 需要得到类似于 Levinson 引理的结论, 将 $\boldsymbol{\rho}_\Delta$ 与有限区间上的 Weyl 函数联系起来 $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho_b(\lambda)}{|\mu-\lambda|^2} = \frac{\mathrm{Im} m_b(\mu)}{\mathrm{Im}\mu}\right)$.

记 $y_1(x,z) = \varphi(x,z) + m_a(z)\theta(x,z)$, 它是微分方程 $My = zy$, $\mathrm{Im} z \neq 0$ 满足 a 点与 z 无关的边条件

$$\cos\beta y_1(a) + \sin\beta p(a) y_1'(a) = 0, \quad 0 \leqslant \beta < \pi$$

$(y_1(a) = \sin\beta, p(a)y_1'(a) = -\cos\beta$, 与 z 无关!) 的解, 显然

$$\begin{aligned} m_a(z) &= -\frac{\cos\beta\varphi(a,z) + \sin\beta p(a)\varphi'(a,z)}{\cos\beta\theta(a,z) + \sin\beta p(a)\theta'(a,z)} \\ &= -\frac{cot\beta\varphi(a,z) + p(a)\varphi'(a,z)}{cot\beta\theta(a,z) + p(a)\theta'(a,z)} \in C_a, \quad [y_1,y_1](a) = 0. \end{aligned}$$

类似地, $y_2(x,z) = \varphi(x,z) + m_b(z)\theta(x,z)$ 是微分方程 $My = zy$, $\mathrm{Im} z \neq 0$ 满足 b 点与 z 无关的边条件

$$\cos\gamma y_2(b) + \sin\gamma p(b) y_2'(b) = 0, \quad 0 \leqslant \gamma < \pi$$

$(y_2(b) = \sin\gamma, p(b)y_2'(b) = -\cos\gamma$, 与 z 无关!) 的解,

$$\begin{aligned} m_b(z) &= -\frac{\cos\gamma\varphi(b,z) + \sin\gamma p(b)\varphi'(b,z)}{\cos\gamma\theta(b,z) + \sin\gamma p(b)\theta'(b,z)} \\ &= -\frac{cot\gamma\varphi(b,z) + p(b)\varphi'(b,z)}{cot\gamma\theta(b,z) + p(b)\theta'(a,z)} \in C_b, \quad [y_2,y_2](b) = 0. \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Im} z \neq 0$, z 不是 T_Δ 的特征值, 所以 y_1, y_2 线性无关. 于是 $m_b(z) \neq m_a(z)$. 考虑边值问题

$$\begin{cases} zy - My = f, \quad f \in L^2(\Delta), \\ l_1(y) \equiv \cos\beta y(a) + \sin\beta p(a) y'(a) = 0, \\ l_2(y) \equiv \cos\gamma y(b) + \sin\gamma p(b) y'(b) = 0 \end{cases}$$

的解, 由于 $z \in \rho(T_\Delta)$, 所以对任意的 $f \in L^2(\Delta)$, 这个问题的解存在且唯一. 设 y_0 是非齐次微分方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} zy - My = f, \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

的解, 则

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_0.$$

先用常数变易法求出 y_0, 然后再来确定常数 c_1, c_2. 设

$$y_0 = Ay_1 + By_2,$$

则

$$y_0' = Ay_1' + By_2', \quad A'y_1 + B'y_2 = 0,$$
$$(py_0')' = A(py_1')' + B(py_2')' + A'py_1' + B'py_2'.$$

于是

$$\begin{aligned} f &= zy_0 - My_0 = zy_0 + (py_0')' - qy_0 \\ &= z(Ay_1 + By_2) + A(py_1')' + B(py_2')' + A'py_1' + B'py_2' - q(Ay_1 + By_2) \\ &= A'py_1' + B'py_2'. \end{aligned}$$

这样得到方程组

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0, \\ A'py_1' + B'py_2' = f, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & py_2' \end{vmatrix}}{p(y_1y_2' - y_1'y_2)} = -\dfrac{fy_2}{\omega(z)}, \\[2ex] B' = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ py_1' & f \end{vmatrix}}{p(y_1y_2' - y_1'y_2)} = \dfrac{fy_1}{\omega(z)} \end{cases}$$

(由 Liouville 公式得 $p(x)W(y_1, y_2)(x) = \text{const} \neq 0$, 所以

$$\begin{aligned} \text{const} = p(0)W(y_1, y_2)(0) &= p(0)\begin{vmatrix} \varphi(0,z) + m_a(z)\theta(0,z) & \varphi(0,z) + m_b(z)\theta(0,z) \\ \varphi'(0,z) + m_a(z)\theta'(0,z) & \varphi'(0,z) + m_b(z)\theta'(0,z) \end{vmatrix} \\ &= m_b(z) - m_a(z) = \omega(z)). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases} A = \displaystyle\int_0^x -\frac{f(t)y_2(t)}{\omega(z)}\mathrm{d}t + \widetilde{A}, \\ B = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)y_1(t)}{\omega(z)}\mathrm{d}t + \widetilde{B}, \end{cases}$$

而

$$y_0 = \widetilde{A}y_1 + \widetilde{B}y_2 + \int_0^x \frac{f(t)}{\omega(z)}\left(-y_1(x)y_2(t) + y_1(t)y_2(x)\right)\mathrm{d}t.$$

由条件 $y_0(0) = y_0'(0) = 0$ 得

$$\begin{cases} \widetilde{A}y_1(0) + \widetilde{B}y_2(0) = 0, \\ \widetilde{A}y_1'(0) + \widetilde{B}y_2'(0) = 0. \end{cases}$$

由于 y_1, y_2 线性无关, 故 $\widetilde{A} = \widetilde{B} = 0$. 所以

$$y_0 = \int_0^x \frac{f(t)}{\omega(z)}\left(y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)\right)\mathrm{d}t.$$

下面来定常数 c_1, c_2.

$$\begin{cases} 0 = l_1(y) = c_1 l_1(y_1) + c_2 l_1(y_2) + l_1(y_0) = c_2 l_1(y_2) + l_1(y_0), \\ 0 = l_2(y) = c_1 l_2(y_1) + l_2(y_0). \end{cases}$$

可是

$$l_1(y_2) = \cos\beta y_2(a) + \sin\beta p(a)y_2'(a) = \begin{vmatrix} \sin\beta & y_2(a) \\ -\cos\beta & p(a)y_2'(a) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ p(a)y_1'(a) & p(a)y_2'(a) \end{vmatrix} = p(a)W(y_1, y_2)(a) = \omega(z),$$

同样,

$$l_2(y_1) = \cos\gamma y_1(b) + \sin\gamma p(b)y_1'(b) = p(b)W(y_1, y_2)(b) = \omega(z).$$

因此从

$$\begin{aligned} 0 =& c_2\omega(z) + \cos\beta\int_0^a \frac{f(t)}{\omega(z)}(y_1(t)y_2(a) - y_1(a)y_2(t))\mathrm{d}t \\ &+ \sin\beta p(a)\int_0^a \frac{f(t)}{\omega(z)}(y_1(t)y_2'(a) - y_1'(a)y_1(t))\mathrm{d}t \\ =& c_2\omega(z) + \int_0^a \frac{f(t)}{\omega(z)}\Big(y_1(t)\left(\cos\beta y_2(a) + \sin\beta p(a)y_2'(a)\right) \\ &- y_2(t)\left(\cos\beta y_1(a) + \sin\beta p(a)y_2'(a)\right)\Big)\mathrm{d}t \\ =& c_2\omega(z) + \int_0^a f(t)y_1(t)\mathrm{d}t = c_2\omega(z) - \int_a^0 f(t)y_1(t)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$$0 = c_1\omega(z) - \int_0^b f(t)y_2(t)\mathrm{d}t,$$

可以解得

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\omega(z)}\displaystyle\int_0^b f(t)y_2(t)\mathrm{d}t, \\ c_2 = \dfrac{1}{\omega(z)}\displaystyle\int_a^0 f(t)y_1(t)\mathrm{d}t. \end{cases}$$

这样便得出

$$\begin{aligned} y =& c_1y_1 + c_2y_2 + y_0 \\ =& \frac{1}{\omega(z)}\int_0^b f(t)y_1(x)y_2(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega(z)}\int_a^0 f(t)y_1(t)y_2(x)\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{\omega(z)}\int_0^x f(t)\left(y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)\right)\mathrm{d}t \\ =& \frac{1}{\omega(z)}\int_a^x f(t)y_1(t)y_2(x)\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega(z)}\int_x^b f(t)y_1(x)y_2(t)\mathrm{d}t \\ =& \int_a^b G_\Delta(x,t,z)f(t)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

其中,

$$G_\Delta(x,t,z) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{\omega(z)}, & t \leqslant x, \\ \dfrac{y_1(x)y_2(t)}{\omega(z)}, & t > x \end{cases}$$

称为 Δ 上边值问题

$$\begin{cases} zy - My = f, \\ l_1(y) = l_2(y) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数. 实际上, 它是豫解算子 $(zI - T_\Delta)^{-1}, \mathrm{Im}z \neq 0$ 的积分核.

$$G_\Delta(x,0,z) = \begin{cases} \dfrac{y_1(0)y_2(x)}{m_b(z) - m_a(z)}, & 0 \leqslant x, \\ \dfrac{y_1(x)y_2(0)}{m_b(z) - m_a(z)}, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y_2(x)}{m_b(z) - m_a(z)}, & x \geqslant 0, \\ \dfrac{y_1(x)}{m_b(z) - m_a(z)}, & x < 0, \end{cases}$$

可是由 Green 公式, 一方面

$$\int_\Delta MG_\Delta(x,0,z)\cdot\overline{G_\Delta(x,0,z)}\mathrm{d}x-\int_\Delta G_\Delta(x,0,z)\cdot\overline{MG_\Delta(x,0,z)}\mathrm{d}x$$
$$=(z-\overline{z})\int_\Delta|G_\Delta(x,0,z)|^2\,\mathrm{d}x=2\mathrm{iIm}z\int_\Delta|G_\Delta(x,0,z)|^2\,\mathrm{d}x.$$

另一方面它又等于①

$$\begin{aligned}[G_\Delta(\cdot,0,z),G_\Delta(\cdot,0,z)]_a^b&=\frac{1}{|m_b(z)-m_a(z)|^2}\left([y_1,y_1]_a^0+[y_2,y_2]_0^b\right)\\&=\frac{1}{|m_b(z)-m_a(z)|^2}\left(-[y_2,y_2](0)+[y_1,y_1](0)\right),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}[y_2,y_2](0)=&[\varphi+m_b(z)\theta,\varphi+m_b(z)\theta](0)=m_b(z)[\theta,\varphi](0)+\overline{m_b(z)}[\varphi,\theta](0)\\=&-m_b(z)\overline{[\varphi,\theta](0)}+\overline{m_b(z)}[\varphi,\theta](0),\\=&\overline{m_b(z)}-m_b(z)=-2\mathrm{iIm}m_b(z),\\[y_1,y_1](0)=&-2\mathrm{iIm}m_a(z),\end{aligned}$$

于是

$$\int_\Delta|G_\Delta(x,0,z)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{Im}\,(-m_a(z)+m_b(z))}{\mathrm{Im}z\,|m_b(z)-m_a(z)|^2}=\frac{\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{-m_b(z)+m_a(z)}\right)}{\mathrm{Im}z},$$

由 Parseval 等式,

$$\begin{aligned}\int_\Delta|G_\Delta(x,0,z)|^2\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^\infty\left|\int_\Delta G_\Delta(x,0,z)h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x\right|^2\\&=\sum_{n=1}^\infty\int_\Delta G_\Delta(x,0,z)h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x\int_\Delta\overline{G_\Delta(x,0,z)}h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

看右边的和数 ($h_{\Delta n}$ 是实的!)

$$\int_\Delta MG_\Delta(x,0,z)h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x-\int_\Delta G_\Delta(x,0,z)Mh_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x=[G_\Delta(\cdot,0,z),h_{\Delta n}]_a^b,$$

即

$$\begin{aligned}(z-\lambda_{\Delta n})\int_\Delta G_\Delta(x,0,z)h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x&=[G_\Delta(\cdot,0,z),h_{\Delta n}]_a^b\\&=\frac{1}{m_b(z)-m_a(z)}\left([y_2,h_{\Delta n}]_0^b+[y_1,h_{\Delta n}]_a^0\right).\end{aligned}$$

---

① 注意: y_2 是复的, y_2 与 $\overline{y_2}$ 不一定相关, $W(y_2,\overline{y_2})$ 要计算! y_1 在 a, y_2 在 b 的初值与 z 无关! 是实的, 所以

$$[y_1,y_1](a)=[y_2,y_2](b)=0.$$

由于 $h_{\Delta n}$ 是实的且满足 a 和 b 点边条件, 故

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= \frac{1}{m_b(z)-m_a(z)}\left([y_1,h_{\Delta n}](0)-[y_2,h_{\Delta n}](0)\right)\\
&= \frac{1}{m_b(z)-m_a(z)}\left([y_1-y_2,h_{\Delta n}](0)\right)\\
&= \frac{1}{m_b(z)-m_a(z)}\left[(m_a(z)-m_b(z))\,\theta(\cdot,z),r_{\Delta n1}\varphi(\cdot,\lambda_{\Delta n})+r_{\Delta n2}\theta(\cdot,\lambda_{\Delta n})\right](0)\\
&= -r_{\Delta n1}\left[\theta(\cdot,z),\varphi(\cdot,\lambda_{\Delta n})\right](0)(\text{在 } 0 \text{ 点 } \theta \text{ 满足的初值与 } z \text{ 无关!}) = r_{\Delta n1}.
\end{aligned}$$

于是

$$\int_\Delta G_\Delta(x,0,z)h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x=\frac{r_{\Delta n1}}{z-\lambda_{\Delta n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{\Delta n1}}{z-\lambda_{\Delta n}}\right|^2=\frac{\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{-m_b(z)+m_a(z)}\right)}{\mathrm{Im}z}.$$

记

$$M_{\Delta 11}(z)=\frac{1}{-m_b(z)+m_a(z)},$$

则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\lambda-z|^2}\mathrm{d}\rho_{\Delta 11}(\lambda)=\frac{\mathrm{Im}M_{\Delta 11}(z)}{\mathrm{Im}z}.$$

类似地, 得出其余 3 个等式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}G_\Delta(x,0,z) &= \begin{cases}\dfrac{y_1'(0)y_2(x)}{\omega(z)}, & x\geqslant 0,\\[2ex] \dfrac{y_1(x)y_2'(0)}{\omega(z)}, & x<0\end{cases}\\
&= \begin{cases}\dfrac{m_a(z)y_2(x)}{p(0)\left(m_b(z)-m_a(z)\right)}, & x\geqslant 0,\\[2ex] \dfrac{m_b(z)y_1(x)}{p(0)\left(m_b(z)-m_a(z)\right)}, & x<0,\end{cases}
\end{aligned}$$

由广义的 Parseval 等式,

$$\begin{aligned}
\int_\Delta G_\Delta(x,0,z)\overline{\frac{\partial}{\partial t}G_\Delta(x,0,z)}\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Delta G_\Delta(x,0,z)h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x\\
&\quad\cdot\int_\Delta\overline{\frac{\partial}{\partial t}G_\Delta(x,0,z)h_{\Delta n}(x)}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

根据 Green 公式, 由

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta} MG_{\Delta}(x,0,z)\cdot\overline{\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)}\mathrm{d}x-\int_{\Delta} G_{\Delta}(x,0,z)\cdot M\overline{\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)}\mathrm{d}x\\
=&(z-\overline{z})\int_{\Delta} G_{\Delta}(x,0,z)\cdot\overline{\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)}\mathrm{d}x\\
=&2\mathrm{iIm}z\int_{\Delta} G_{\Delta}(x,0,z)\cdot\overline{\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

而 (分别在 $[a,0]$ 和 $[0,b]$ 上用 Green 公式)

$$\begin{aligned}
&\left[G_{\Delta}(\cdot,0,z),\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(\cdot,0,z)\right]_a^b\\
=&\left[G_{\Delta}(\cdot,0,z),\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(\cdot,0,z)\right]_a^0+\left[G_{\Delta}(\cdot,0,z),\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(\cdot,0,z)\right]_0^b\\
=&\frac{\overline{m_b(z)}}{p(0)\left|m_b(z)-m_a(z)\right|^2}[y_1,y_1](0)-\frac{\overline{m_a(z)}}{p(0)\left|m_b(z)-m_a(z)\right|^2}[y_2,y_2](0)\\
=&\frac{1}{p(0)\left|m_b(z)-m_a(z)\right|^2}\left(-2\mathrm{i}\overline{m_b(z)}\mathrm{Im}m_a(z)+2\mathrm{i}\overline{m_a(z)}\mathrm{Im}m_b(z)\right),
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} G_{\Delta}(x,0,z)\overline{\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)}\mathrm{d}x&=\frac{-\overline{m_b(z)}\mathrm{Im}m_a(z)+\overline{m_a(z)}\mathrm{Im}m_b(z)}{\mathrm{Im}zp(0)|m_b(z)-m_a(z)|^2}\\
&=\frac{1}{p(0)}\frac{\mathrm{Im}\dfrac{1}{2}\dfrac{m_b(z)+m_a(z)}{-m_b(z)+m_a(z)}}{\mathrm{Im}z},
\end{aligned}$$

因为

$$\int_{\Delta} G_{\Delta}(x,0,z)h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x=\frac{r_{\Delta n1}}{z-\lambda_{\Delta n}},$$

另外从

$$\int_{\Delta}\left(M\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)\cdot h_{\Delta n}-\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)\cdot Mh_{\Delta n}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(\cdot,0,z),h_{\Delta n}\right]_a^b,$$

即

$$\begin{aligned}
(z-\lambda_{\Delta n})\int_{\Delta}\frac{\partial G_{\Delta}(x,0,z)}{\partial t}h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x&=\left[\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(\cdot,0,z),h_{\Delta n}\right]_a^b\\
&=\frac{m_b(z)}{p(0)\left(m_b(z)-m_a(z)\right)}\left[y_1,h_{\Delta n}\right]_a^0\\
&\quad+\frac{m_a(z)}{p(0)\left(m_b(z)-m_a(z)\right)}\left[y_2,h_{\Delta n}\right]_0^b.
\end{aligned}$$

因为 $h_{\Delta n}$ 满足 a 和 b 点的边条件,

$$
\begin{aligned}
\text{上式} =& \frac{m_b(z)}{p(0)\left(m_b(z)-m_a(z)\right)}[y_1, h_{\Delta n}](0) - \frac{m_a(z)}{p(0)\left(m_b(z)-m_a(z)\right)}[y_2, h_{\Delta n}](0) \\
=& \frac{m_b(z)}{p(0)\left(m_b(z)-m_a(z)\right)}[\varphi(\cdot,z)+m_a(z)\theta(\cdot,z), r_{\Delta n1}\varphi(\cdot,\lambda_{\Delta n}) \\
& + r_{\Delta n2}\theta(\cdot,\lambda_{\Delta n})](0) - \frac{m_a(z)}{p(0)\left(m_b(z)-m_a(z)\right)}[\varphi(\cdot,z) \\
& + m_b(z)\theta(\cdot,z), r_{\Delta n1}\varphi(\cdot,\lambda_{\Delta n}) + r_{\Delta n2}\theta(\cdot,\lambda_{\Delta n})](0) \\
=& \frac{m_b(z)\left(r_{\Delta n2}-m_a(z)r_{\Delta n1}\right)}{p(0)\left(m_b(z)-m_a(z)\right)} - \frac{m_a(z)\left(r_{\Delta n2}-m_b(z)r_{\Delta n1}\right)}{p(0)\left(m_b(z)-m_a(z)\right)} \\
=& \frac{r_{\Delta n2}}{p(0)}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\int_\Delta \overline{\frac{\partial}{\partial t}G_\Delta(x,0,z)}h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x = \frac{r_{\Delta n2}}{\overline{z}-\lambda_{\Delta n}} \cdot \frac{1}{p(0)},
$$

这样便得

$$
\frac{1}{p(0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{\Delta n1}r_{\Delta n2}}{|z-\lambda_{\Delta n}|^2} = \frac{1}{p(0)}\frac{\mathrm{Im}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m_b(z)+m_a(z)}{-m_b(z)+m_a(z)}\right)}{\mathrm{Im}z}.
$$

记

$$
M_{\Delta 12}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{m_b(z)+m_a(z)}{-m_b(z)+m_a(z)}\right),
$$

则有

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|z-\lambda|^2}\mathrm{d}\rho_{\Delta 12}(\lambda) = \frac{\mathrm{Im}M_{\Delta 12}(z)}{\mathrm{Im}z}.
$$

同样,

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|z-\lambda|^2}\mathrm{d}\rho_{\Delta 21}(\lambda) = \frac{\mathrm{Im}M_{\Delta 12}(z)}{\mathrm{Im}z} = \frac{\mathrm{Im}M_{\Delta 21}(z)}{\mathrm{Im}z},
$$

$$
M_{\Delta 12}(z) = M_{\Delta 21}(z),
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Delta \frac{\partial}{\partial t}G_\Delta(x,0,z)\overline{\frac{\partial}{\partial t}G_\Delta(x,0,z)}\mathrm{d}x =& \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Delta \frac{\partial}{\partial t}G_\Delta(x,0,z)h_{\Delta n}(x)\mathrm{d}x \\
& \cdot \int_\Delta \overline{\frac{\partial}{\partial t}G_\Delta(x,0,z)h_{\Delta n}(x)}\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

$$\int_{\Delta} M\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)\cdot\overline{\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)}\mathrm{d}x-\int_{\Delta}\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)\cdot\overline{M\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)}\mathrm{d}x$$

$$=(z-\overline{z})\int_{\Delta}\left|\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)\right|^2\mathrm{d}x$$

$$=2\mathrm{i}\mathrm{Im}z\int_{\Delta}\left|\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)\right|^2\mathrm{d}x,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(\cdot,0,z),\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(\cdot,0,z)\right]_a^b$$

$$=\frac{|m_b(z)|^2}{p^2(0)\,|m_b(z)-m_a(z)|^2}[y_1,y_1](0)-\frac{|m_a(z)|^2}{p^2(0)\,|m_b(z)-m_a(z)|^2}[y_2,y_2](0)$$

$$=\frac{1}{p^2(0)\,|m_b(z)-m_a(z)|^2}2\mathrm{i}\left(-|m_b(z)|^2\,\mathrm{Im}m_a(z)+|m_a(z)|^2\,\mathrm{Im}m_b(z)\right),$$

所以

$$\int_{\Delta}\left|\frac{\partial}{\partial t}G_{\Delta}(x,0,z)\right|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{p^2(0)}\left(\frac{-|m_b(z)|^2\mathrm{Im}m_a(z)+|m_a(z)|^2\mathrm{Im}m_b(z)}{\mathrm{Im}z|m_b(z)-m_a(z)|^2}\right)$$

$$=\frac{1}{p^2(0)}\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\dfrac{m_a(z)m_b(z)}{-m_b(z)+m_a(z)}\right)}{\mathrm{Im}z}\right),$$

故

$$\frac{1}{p^2(0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{\Delta n2}^2}{|z-\lambda_{\Delta n}|^2}=\frac{1}{p^2(0)}\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\dfrac{m_a(z)m_b(z)}{-m_b(z)+m_a(z)}\right)}{\mathrm{Im}z}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|z-\lambda|^2}\mathrm{d}\rho_{\Delta 22}(\lambda)=\frac{\mathrm{Im}M_{\Delta 22}}{\mathrm{Im}z},$$

其中,

$$M_{\Delta 22}(z)=\frac{m_a(z)m_b(z)}{-m_b(z)+m_a(z)}.$$

总结以上讨论, 有

引理 3.11.3 设 $\mathrm{Im}z\neq 0$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|z-\lambda|^2}\mathrm{d}\rho_{\Delta jk}(\lambda)=\frac{\mathrm{Im}M_{\Delta jk}(z)}{\mathrm{Im}z},\quad j,k=1,2,$$

其中,

$$M_{\Delta 11}(z)=\frac{1}{-m_b(z)+m_a(z)},$$

$$M_{\Delta 12}(z)=M_{\Delta 21}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{m_b(z)+m_a(z)}{-m_b(z)+m_a(z)}\right),$$

$$M_{\Delta 22}(z)=\frac{m_b(z)m_a(z)}{-m_b(z)+m_a(z)}.$$

引理 3.11.4 (推广的 Helly 选择定理)　设 $\{\sigma_n(\lambda)\}$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的局部有界变差函数序列, 如果存在正函数 $F(\lambda)$, 使得

$$|\sigma_n(\lambda)|\leqslant F(\lambda),\quad \lambda\in(-\infty,\infty), n=1,2,\cdots$$

且

$$\pi_n(\lambda)=\bigvee_0^\lambda \sigma_n\leqslant F(\lambda),\quad \lambda\in(-\infty,\infty), n=1,2,\cdots,$$

则存在点点收敛的子序列 $\{\sigma_{n_k}(\lambda)\}$, 极限函数 $\sigma(\lambda)$ 也是局部有界变差的.

证明　令

$$\nu_n(\lambda)=\pi_n(\lambda)-\sigma_n(\lambda),$$

则由那汤松《实变函数论》Chap.8 §3 定理 6, $\pi_n(\lambda)$ 与 $\nu_n(\lambda)$ 都是单调增加的函数.

$$\sigma_n(\lambda)=\pi_n(\lambda)-\nu_n(\lambda),$$

$$|\pi_n(\lambda)|\leqslant F(\lambda),$$

$$|\nu_n(\lambda)|\leqslant 2F(\lambda),$$

利用 Helly 定理, 存在子序列 $\{\pi_{n_k}(\lambda)\}$ 和 $\{\nu_{n_k}(\lambda)\}$, 使得

$$\pi(\lambda)=\lim_{k\to\infty}\pi_{n_k}(\lambda),$$

$$\nu(\lambda)=\lim_{k\to\infty}\nu_{n_k}(\lambda)$$

且 $\pi(\lambda),\nu(\lambda)$ 都是非降的. 于是

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{n_k}(\lambda)=\pi(\lambda)-\nu(\lambda)=\sigma(\lambda).$$

由那汤松《实变函数论》Chap.8 §3 定理 1 与定理 3, $\sigma(\lambda)$ 是局部有界变差函数.

定理 3.11.2　如果 M 属于情形 IV(即 $-\infty$ 和 ∞ 都是极限点) , 记

$$\lim_{a\to-\infty}m_a(z)=M_-(z),\quad \lim_{b\to\infty}m_b(z)=M_+(z),$$

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)}M_{\Delta jk}(z)=M_{jk}(z),\quad j,k=1,2,$$

$$M_{11}(z)=\frac{1}{-M_+(z)+M_-(z)},$$

$$M_{12}(z)=M_{21}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{M_+(z)+M_-(z)}{-M_+(z)+M_-(z)}\right),$$

$$M_{22}(z)=\frac{M_+(z)M_-(z)}{-M_+(z)+M_-(z)},$$

则存在唯一的实对称谱矩阵

$$\boldsymbol{\rho}(\lambda)=\begin{pmatrix}\rho_{11}(\lambda) & \rho_{12}(\lambda)\\ \rho_{21}(\lambda) & \rho_{22}(\lambda)\end{pmatrix}$$

满足 (1) $\varDelta=(\lambda,\mu]$, $\boldsymbol{\rho}(\varDelta)$ 是非负定的;

(2) ρ_{jk} 局部有界变差;

(3) 在 ρ_{jk} 的连续点 λ, μ,

$$\lim_{\varDelta\to(-\infty,\infty)}(\rho_{\varDelta jk}(\mu)-\rho_{\varDelta jk}(\lambda))=\rho_{jk}(\mu)-\rho_{jk}(\lambda)$$

且有

$$\rho_{jk}(\mu)-\rho_{jk}(\lambda)=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_\lambda^\mu \mathrm{Im}M_{jk}(\varepsilon+\mathrm{i}\delta)\mathrm{d}\varepsilon.$$

证明

$$\int_0^a|y_1(x,z)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{Im}m_a(z)}{\mathrm{Im}z}\quad(\text{因为 } m_a(z)\in C_a),$$

$$\int_0^b|y_2(x,z)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{Im}m_b(z)}{\mathrm{Im}z}\quad(\text{因为 } m_b(z)\in C_b),$$

所以 $\mathrm{Im}m_a(z)$ 与 $\mathrm{Im}m_b(z)$ 反号, 即 $m_a(z)$ 与 $m_b(z)$ 在不同的两个半平面上, 在实轴的两侧. 取 $z=\mathrm{i}$,

$$m_a(\mathrm{i})\in C_{-1}(\mathrm{i}),\quad a<-1,$$

$$m_b(\mathrm{i})\in C_1(\mathrm{i}),\quad b>1,$$

$C_{-1}(\mathrm{i})$ 与 $C_1(\mathrm{i})$ 有正距离 d. 故

$$|m_b(\mathrm{i})-m_a(\mathrm{i})|\geqslant d>0,\quad a<-1,b>1.$$

当 $a<-1,b>1$ 时, $m_a(\mathrm{i})$ 关于 a, $m_b(\mathrm{i})$ 关于 b 有界, 故 $M_{\varDelta 11}(\mathrm{i}),M_{\varDelta 12}(\mathrm{i}),M_{\varDelta 22}(\mathrm{i})$ 关于 $a<-1,b>1$ 是有界的. 这样, 当 $a<-1,b>1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{|\mathrm{i}-\lambda|^2}\mathrm{d}\rho_{\varDelta jk}(\lambda)\right|&=\left|\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\rho_{\varDelta jk}(\lambda)\right|=\left|\frac{\mathrm{Im}M_{\varDelta jk}(\mathrm{i})}{\mathrm{Im}i}\right|\\&=|\mathrm{Im}M_{\varDelta jk}(\mathrm{i})|<K,\end{aligned}$$

对任何 $\nu>0$, 当 $j=k=1$ 或 $j=k=2$ 时, 因为 $\rho_{\varDelta 11}(\lambda)$ 与 $\rho_{\varDelta 22}(\lambda)$ 非降, 有

$$\int_0^\nu\frac{1}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\rho_{\varDelta jk}(\lambda)<\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\rho_{\varDelta jk}(\lambda)<K,$$

$$\frac{1}{1+v^2}\int_0^\nu \mathrm{d}\rho_{\varDelta jk}(\lambda)=\frac{1}{1+\nu^2}\rho_{\varDelta jk}(\nu)<K,$$

所以

$$\rho_{\Delta jk}(\nu) < K(1+\nu^2).$$

同样地

$$\int_{-\nu}^{0} \frac{1}{1+\lambda^2} \mathrm{d}\rho_{\Delta jk}(\lambda) < K,$$

$$\frac{1}{1+\nu^2} \int_{-\nu}^{0} \mathrm{d}\rho_{\Delta jk}(\lambda) = -\frac{1}{1+\nu^2}\rho_{\Delta jk}(-\nu) < K,$$

所以

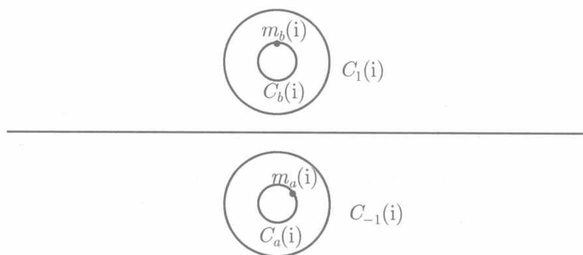


图 3.14

$$|\rho_{\Delta jk}(-\nu)| < K(1+\nu^2) \quad \rho_{\Delta jk}(-\nu) \text{ 是负的!}$$

当 $j \neq k$ 时, $\rho_{\Delta jk}(\lambda)$ 是阶梯函数, 但不一定单调, 在 $\lambda > 0$ 时,

$$\begin{aligned}|\rho_{\Delta 12}(\lambda)| = \left|\sum_{0<\lambda_{\Delta n}\leqslant\lambda} r_{\Delta n1} r_{\Delta n2}\right| &\leqslant \sum_{0<\lambda_{\Delta n}\leqslant\lambda} |r_{\Delta n1}|\,|r_{\Delta n2}| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{0<\lambda_{\Delta n}\leqslant\lambda} \left(r_{\Delta n1}^2 + r_{\Delta n2}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho_{\Delta 11} + \rho_{\Delta 22}\right) < K(1+\lambda^2).\end{aligned}$$

当 $\lambda < 0$ 时也一样, 所以

$$|\rho_{\Delta 12}(\lambda)|, |\rho_{\Delta 21}(\lambda)| < K(1+\lambda^2),$$

这样由引理 3.11.4, 存在收敛的子列, 使得极限

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} \rho_{\Delta_k 11}(\lambda) = \rho_{11}(\lambda),\\ &\lim_{k\to\infty} \rho_{\Delta_k 12}(\lambda) = \lim_{k\to\infty} \rho_{\Delta_k 21}(\lambda) = \rho_{12}(\lambda) = \rho_{21}(\lambda), \quad \lim_{k\to\infty} \Delta_k = (-\infty, \infty),\\ &\lim_{k\to\infty} \rho_{\Delta_k 22}(\lambda) = \rho_{22}(\lambda)\end{aligned}$$

存在, 即

$$\lim_{k\to\infty}\rho_{\Delta_k}=\rho.$$

显然 $\boldsymbol{\rho}$ 也具有 $\boldsymbol{\rho}_\Delta$ 所具有的那 3 条性质.

剩下来证明 Titchmarsh 型公式. 当 $j=k$ 时, $\rho_{\Delta 11}(\lambda)$, $\rho_{\Delta 22}(\lambda)$ 是非降的. 其证明与 3.7 节里的一样. 对 $j\neq k$, 需要引用下述定理 (cf. 那汤松《实变函数论》Chap.8 定理 3.7.3):

设 (1) $\{\rho_n(\lambda)\}$是 $[a,b]$ 上的有界变差函数序列, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n(\lambda)=\rho(\lambda)$;

(2) $\bigvee\limits_a^b\rho_n\leqslant K$;

(3) $\varphi\in C[a,b]$,

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi(\lambda)\mathrm{d}\rho_n(\lambda)=\int_a^b\varphi(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

至于 Titchmarsh 型公式的证明则与 3.7 节的相同.

同样地, 可得 M 属于情形 I$\sim$ 情形 III 的定理. 例如,

定理 3.11.3　如果 M 属于情形 I, $\mathrm{Im}z_0\neq 0$, 取 $\widehat{m}_{-\infty}(z_0)\in C_{-\infty}(z_0)$, $\widehat{m}_\infty(z_0)\in C_\infty(z_0)$, $M_-(z,\widehat{m}_{-\infty}(z_0))$ 和 $M_+(z,\widehat{m}_\infty(z_0))$ 是对应的 Weyl 函数, 则

$$M_{11}(z)=\frac{1}{-M_+(z,\widehat{m}_\infty(z_0))+M_-(z,\widehat{m}_{-\infty}(z_0))},$$

$$M_{12}(z)=M_{21}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{M_++M_-}{-M_++M_-}\right),$$

$$M_{22}(z)=\frac{M_+M_-}{-M_++M_-}$$

是全平面的半纯函数, 存在实对称谱矩阵 (依赖于 $\widehat{m}_{-\infty}(z_0)$, $\widehat{m}_\infty(z_0)$ 的选取!)

$$\boldsymbol{\rho}(\lambda)=\begin{pmatrix}\rho_{11}(\lambda) & \rho_{12}(\lambda)\\ \rho_{21}(\lambda) & \rho_{22}(\lambda)\end{pmatrix}$$

满足

(1) $\Delta=(\lambda,\mu]$, $\boldsymbol{\rho}(\Delta)$ 非负定;

(2) ρ_{jk} 局部有界变差;

(3) 在 ρ_{jk} 的连续点 λ, μ 处, 有

$$\rho_{jk}(\mu)-\rho_{jk}(\lambda)=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_\lambda^\mu\mathrm{Im}M_{jk}(\varepsilon+\mathrm{i}\delta)\mathrm{d}\varepsilon.$$

但是在这些情形下, 谱矩阵并不唯一, 随着 $\widehat{m}_{-\infty}(z_0)$, $\widehat{m}_\infty(z_0)$ 的选取不同而不一样, 这意味着在 $\pm\infty$ 所加的边条件不同, 得到的 $T_0(M)$ 的自伴延拓也不同. 根据定理 3.7.3, 利用 Titchmarsh 公式可以得出这些 $\rho_{jk}(\lambda)$.

设 $\boldsymbol{\rho}(\lambda)$ 是一个谱矩阵, 即 ρ_{jk} 局部有界变差, $\boldsymbol{\rho}(\Delta)$ 非负定, 令

$$L_\rho^2 = \left\{ \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \middle| \|\boldsymbol{g}\|_\rho^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{2} \overline{g_j(\lambda)} g_k(\lambda) \mathrm{d}\rho_{jk}(\lambda) < \infty \right\},$$

这里 $\boldsymbol{\rho}(\Delta)$ 非负定保证了 $\|\boldsymbol{g}\|_\rho^2 \geqslant 0$.

定理 3.11.4 设 $\boldsymbol{\rho}$ 是 $T_0(M)$ 的 Weyl-Titchmarsh 自伴延拓 T 的谱矩阵, 则对任何 $f \in L^2(-\infty,\infty)$, 存在 $\boldsymbol{g} \in L_\rho^2$, 使得

(1) $\lim\limits_{(c,d)\to(-\infty,\infty)} \|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}_{cd}\|_\rho = 0$, 其中,

$$\boldsymbol{g}_{cd} = \begin{pmatrix} g_{cd1} \\ g_{cd2} \end{pmatrix}, \quad g_{cd1} = \int_c^d f(x)\varphi(x,\cdot)\mathrm{d}x, \quad g_{cd2} = \int_c^d f(x)\theta(x,\cdot)\mathrm{d}x;$$

(2) $\|f\|^2 = \|\boldsymbol{g}\|_\rho^2$ (Parseval 等式);

(3)

$$\begin{aligned} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} & \varphi(x,\lambda)g_1(\lambda)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda) + \varphi(x,\lambda)g_2(\lambda)\mathrm{d}\rho_{12}(\lambda) \\ & + \theta(x,\lambda)g_1(\lambda)\mathrm{d}\rho_{21}(\lambda) + \theta(x,\lambda)g_2(\lambda)\mathrm{d}\rho_{22}(\lambda) \end{aligned}$$

(按 $L^2(-\infty,\infty)$ 意义收敛.) 称 $\boldsymbol{g}$ 为 f 的广义 Fourier 变换, 记为 $\widehat{f}$.

反过来, 对任何 $\boldsymbol{g} \in L_\rho^2$,

$$\begin{aligned} f_{cd}(x) = \int_c^d & \varphi(x,\lambda)g_1(\lambda)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda) + \varphi(x,\lambda)g_2(\lambda)\mathrm{d}\rho_{12}(\lambda) \\ & + \theta(x,\lambda)g_1(\lambda)\mathrm{d}\rho_{21}(\lambda) + \theta(x,\lambda)g_2(\lambda)\mathrm{d}\rho_{22}(\lambda) \end{aligned}$$

满足 $\{f_{cd}\}$ 是 $L^2(-\infty,\infty)$ 的 Cauchy 列, 存在 $f \in L^2(-\infty,\infty)$, 使得

$$\lim_{\substack{c\to-\infty,\\ d\to\infty}} \|f_{cd} - f\| = 0$$

且

$$\widehat{f} = \boldsymbol{g}.$$

证明略. 其证明大致与 3.8 节 ~3.10 节类似.

在 $(-\infty,\infty)$ 的情形, 关于特征展开, 谱和谱分解, 据所了解的, 还没有一本书严格地写过, 认为把这些东西严格地写一下还是有意义的! 这里只是对 Weyl-Titchmarsh 自伴延拓而言, 一般的自伴延拓, 还没有看到这方面的结果. 另外, 如何由 $\boldsymbol{\rho}$ 去得到 $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ 也没有经过仔细的推敲.

第 4 章　例　　子

4.1　微分算式 $-\mathrm{i}D$ 与 $L^2(\mathbf{R})$ 上的 Fourier 变换

4.1.1　自伴算子 $T_0(M)$

$$M=-\mathrm{i}D,\quad x\in\mathbf{R},$$

$$My=\mathrm{i}y,\quad y'=-y,\quad y=\mathrm{e}^{-x}\notin L^2(\mathbf{R}),\quad d_+=0,$$
$$My=-\mathrm{i}y,\quad y'=y,\quad y=\mathrm{e}^{x}\notin L^2(\mathbf{R}),\quad d_-=0.$$

$T_0(M)$ 的亏指数为 $(0,0)$, 所以自伴.

4.1.2　$T_0(M)$ 的谱

设 $\lambda\in\mathbf{R}$, 由于

$$My=\lambda y,\quad -\mathrm{i}y'=\lambda y,\quad y'=\mathrm{i}\lambda y,$$

非零解 $y=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$, $C\neq 0$, 而 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\notin L^2(\mathbf{R})$, 故 $T_0(M)$ 无特征值, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$, $(T_0(M)-\lambda I)^{-1}$ 都存在. 考虑函数

$$f(x)=\beta^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\beta x^2+\mathrm{i}\lambda x},\quad \beta>0.$$

因为

$$\|f\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\beta^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-2\beta x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\|f'\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\beta^{\frac{1}{2}}(4\beta^2x^2+\lambda^2)\mathrm{e}^{-2\beta x^2}\mathrm{d}x<\infty,$$

所以 $f\in\mathscr{D}(T_0(M))$. 于是 $(T_0(M)-\lambda I)f\in\mathscr{D}((T_0(M)-\lambda I)^{-1})$, 可是

$$(T_0(M)-\lambda I)f=2\mathrm{i}\beta^{\frac{5}{4}}x\mathrm{e}^{-\beta x^2+\mathrm{i}\lambda x},$$

$$\|(T_0(M)-\lambda I)f\|^2=4\beta^{\frac{5}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-2\beta x}\mathrm{d}x\to 0,\quad \beta\to+0,$$

而

$$\|(T_0(M)-\lambda I)^{-1}(T_0(M)-\lambda I)f\|^2=\|f\|^2=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

这说明 $(T_0(M)-\lambda I)^{-1}$ 是无界的, 所以 $\lambda\in\sigma_c(T_0(M))$. 于是

$$\sigma(T_0(M))=\sigma_c(T_0(M))=\mathbf{R}.$$

4.1.3 预解算子

$\forall\lambda\in\mathbf{C}$, $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$, $R(\lambda,\ T_0(M))=(\lambda I-T_0(M))^{-1}$ 是 $L^2(\mathbf{R})\to\mathscr{D}(T_0(M))$ 的有界线性算子. 设

$$R(\lambda,\ T_0(M))f=y,\quad f\in L^2(\mathbf{R}),$$

$$(\lambda I-T_0(M))y=f,$$

解方程

$$\lambda y+\mathrm{i}y'=f,$$

其中, $y\in\mathscr{D}((T_0(M)),\ y,y'\in L^2(\mathbf{R})$, 故 $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$. 这个齐次线性微分方程的解是

$$y=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}.$$

利用常数变易法有

$$C'(x)=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}f(x).$$

当 $\mathrm{Im}\lambda>0$ 时, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}$ 在 $(-\infty,0]$ 上可积, 所以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上可积,

$$C(x)=C-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}f(t)\mathrm{d}t,$$

因而

$$y=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\left(C-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}f(t)\mathrm{d}t\right).$$

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$, 应有 $C=0$. 于是

$$y=-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-t)}f(t)\mathrm{d}t.$$

类似地, 当 $\mathrm{Im}\lambda<0$ 时,

$$y=\mathrm{i}\int_{x}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-t)}f(t)\mathrm{d}t,$$

所以

$$R(\lambda,\ T_0(M))f=\begin{cases}-\mathrm{i}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-t)}f(t)\mathrm{d}t, & \mathrm{Im}\lambda>0,\\ \mathrm{i}\displaystyle\int_{x}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-t)}f(t)\mathrm{d}t, & \mathrm{Im}\lambda<0.\end{cases}$$

4.1.4 谱族与谱分解 $T_0(M)=\int_{\mathbf{R}}\lambda \mathrm{d}E_\lambda$

利用预解算子来计算谱族 $\{E_\lambda \mid \lambda\in\mathbf{R}\}$, 由于积分区域是 $\mathbf{R}$, 为了便于分析上的处理, 先考虑支集有限的函数, 这些函数在 $L^2(\mathbf{R})$ 中稠, 利用稠性不难过渡到整个空间上.

设 $f,g\in L^2(\mathbf{R})$ 都是支集有限的函数, 则由内积连续性得

$$
\begin{aligned}
(E_{(a,b)}f,\ g)&=\left(\lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a+\delta}^{b-\delta}(R(\mu-\mathrm{i}\varepsilon,T_0(M))-R(\mu+\mathrm{i}\varepsilon,T_0(M)))\mathrm{d}\mu f,g\right)\\
&=\lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a+\delta}^{b-\delta}((R(\mu-\mathrm{i}\varepsilon,T_0(M))-R(\mu+\mathrm{i}\varepsilon,T_0(M)))f,g)\mathrm{d}\mu\\
&=\lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a+\delta}^{b-\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(x)}\left[\mathrm{i}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-\mathrm{i}\varepsilon)(x-t)}f(t)\mathrm{d}t\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu+\mathrm{i}\varepsilon)(x-t)}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}
$$

因为 $f,g\in L^2(\mathbf{R})$ 且支集有限, 所以 f,g 都可积且积分均在有限区域上进行, 可以交换积分次序

$$
\begin{aligned}
\text{上式}=&\lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a+\delta}^{b-\delta}\left(\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-\mathrm{i}\varepsilon)(x-t)}f(t)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\right.\\
&\left.+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{t}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu+\mathrm{i}\varepsilon)(x-t)}f(t)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}
$$

$f(t)\overline{g(x)}$ 可积, 故可用 Lebesgue 控制收敛定理,

$$
\begin{aligned}
\text{上式}&=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{2\pi}\int_{a+\delta}^{b-\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(x-t)}f(t)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{t}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(x-t)}f(t)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\mu\\
&=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{2\pi}\int_{a+\delta}^{b-\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(x-t)}f(t)\overline{g(x)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\mu\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\left(\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(x)}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(x-t)}f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}
$$

令

$$
\hat{f}(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}\mathrm{d}t,
$$

因为 supp$f$ 有限且 f 可积, 这是通常意义的积分, $\hat{f}(\mu)$ 是 f 的 Fourier 变换. 于是

$$(E_{(a,b)}f,\ g) = \int_a^b \hat{f}(\mu)\overline{\hat{g}(\mu)}\mathrm{d}\mu.$$

为了给出 $E_{(a,b)}$ 的表达式, 先让 $a \to -\infty,\ b \to \infty$ 得

$$(f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mu)\overline{\hat{g}(\mu)}\mathrm{d}\mu.$$

由此可得当 $f \in L^2(\mathbf{R})$, supp$f$ 有限时, $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ 且

$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2.$$

对一般的 $f \in L^2(\mathbf{R})$, 取 $f_n = f|_{[-n,n]}$, 则 $f_n \in L^2(\mathbf{R})$, supp$f_n \subset [-n,n]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. 那么 $\{\hat{f}_n\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的 Cauchy 列, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n = h$, 则

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|f_n\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|\hat{f}_n\|^2 = \|h\|^2.$$

而在 $L^2(\mathbf{R})$ 平均收敛意义下,

$$h = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot t}\mathrm{d}t,$$

所以很自然地称 h 为 f 的 Fourier 变换, 记为

$$h = \hat{f} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot t}\mathrm{d}t.$$

于是 $\forall f \in L^2(\mathbf{R})$, 其 Fourier 变换 $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ 且

$$\|f\| = \|\hat{f}\|.$$

$\forall f, g \in L^2(\mathbf{R})$, supp$g$ 有限, 取 $\{f_n\} \subset L^2(\mathbf{R})$, supp$f_n$ 有限, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, 则有

$$\begin{aligned}(E_{(a,b)}f,\ g) &= \lim_{n\to\infty}(E_{(a,b)}f_n,\ g) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \hat{f}_n(\mu)\overline{\hat{g}(\mu)}\mathrm{d}\mu\\ &= \int_a^b \hat{f}(\mu)\overline{\hat{g}(\mu)}\mathrm{d}\mu = \int_a^b \hat{f}(\mu)\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t}\mathrm{d}t\right)}\mathrm{d}\mu\\ &= \int_a^b \hat{f}(\mu)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

因为 $\hat{f}(\mu)$ 和 $\overline{g(t)}$ 都平方可积, 所以 $\hat{f}(\mu)\overline{g(t)}$ 可积, 由 Fubini 定理,

$$\text{上式} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(t)}\Big(\int_a^b \hat{f}(\mu)e^{i\mu t}d\mu\Big)dt$$

$$= \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \hat{f}(\mu)e^{i\mu\cdot}d\mu,\ g\Big),$$

等式对一切 $g \in L^2(\mathbf{R})$, supp g 有限成立, 故

$$(E_{(a,b)}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \hat{f}(\mu)e^{i\mu x}d\mu,$$

$\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$, 右端的积分在通常意义下对每个参数 x 都存在, 通过 Fourier 变换的定义, 形式上它可以转化为作用在 f 上的一个积分算子,

$$(E_{(a,b)}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\mu t}dt\Big)e^{i\mu x}d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_a^b f(t)e^{i\mu(x-t)}d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{e^{i\mu(x-t)}}{i(x-t)}\bigg|_a^b dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ib(x-t)} - e^{ia(x-t)}}{x-t}f(t)dt.$$

4.1.5　$L^2(\mathbf{R})$ 上的 Fourier 变换

由

$$(E_{(a,b)}f,\ g) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \hat{f}(\mu)e^{i\mu\cdot}d\mu,\ g\Big),\quad f, g \in L^2(\mathbf{R}),\ \text{supp}g\ \text{有限},$$

让 $a \to -\infty$, $b \to +\infty$ 可得

$$(f,\ g) = \Big(\lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \hat{f}(\mu)e^{i\mu\cdot}d\mu,\ g\Big),\quad f, g \in L^2(\mathbf{R}),\ \text{supp}\ g\ \text{有限}.$$

于是

$$f = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \hat{f}(\mu)e^{i\mu\cdot}d\mu,$$

所以在 $L^2(\mathbf{R})$ 平均收敛意义下,

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\mu)e^{i\mu\cdot}d\mu.$$

如果令

$$\check{h}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\cdot}\mathrm{d}\mu,\quad h\in L^2(\mathbf{R}),$$

则有

$$f=\check{\hat{f}},$$

这就是 Fourier 变换的反演公式.

4.2 微分算式 $-D^2$ 与 Fourier 展开

4.2.1 有限区间[−1,1] 情形

$$M=-D^2,\quad x\in[-1,1].$$

矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

满足推论 1.3.1 的条件, 所以

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}(T)=\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,|\,f(-1)=0,\ f(1)=0\},\\&Tf=-f'',\quad f\in\mathscr{D}(T)\end{aligned}$$

是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓, 按第 2 章的理论, T 有纯点谱 $\sigma(T)=\sigma_p(T)$. 下面来求 T 的特征值, 求解边值问题

$$\begin{cases}-y''=\lambda y,\quad \lambda\in\mathbf{R},\\ y(\pm1)=0,\end{cases}$$

$$k^2+\lambda=0,$$

$\lambda=0$ 或 $\lambda<0$, 边值问题都只有平凡解. 当 $\lambda>0$ 时,

$$k=\pm\mathrm{i}\sqrt{\lambda},$$

$\{\cos\sqrt{\lambda}x,\sin\sqrt{\lambda}x\}$ 是基本解组,

$$y=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

由 $y(\pm1)=0$ 得

$$\begin{cases}C_1\cos\sqrt{\lambda}+C_2\sin\sqrt{\lambda}=0,\\ C_1\cos\sqrt{\lambda}-C_2\sin\sqrt{\lambda}=0,\end{cases}$$

$$2C_1\cos\sqrt{\lambda}=0 \text{ 或 } 2C_2\sin\sqrt{\lambda}=0.$$

若 $C_1\neq 0$, 则

$$\lambda=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

对应的规范化特征函数是

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

若 $C_2\neq 0$, 则

$$\lambda=n^2\pi^2,\quad n=1,2,\cdots,$$

对应的规范化特征函数是

$$\sin n\pi x,\quad n=1,2,\cdots.$$

因此

$$\sigma(T)=\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\ \middle|\ n=1,2,\cdots\right\}\cup\{\,n^2\pi^2\mid n=1,2,\cdots\},$$

而特征函数

$$\left\{\cos\frac{\pi}{2}x,\ \sin\pi x,\ \cos\frac{3}{2}\pi x,\cdots,\ \sin n\pi x,\ \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x,\cdots\right\}$$

是 $L^2[-1,1]$ 的规范正交基. 故 $\forall f\in L^2[-1,1]$, 有按特征函数的展开式

$$\begin{aligned}f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x\int_{-1}^{1}f(t)\cos\frac{\pi}{2}t\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi x\int_{-1}^{1}f(t)\sin n\pi t\mathrm{d}t\\+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\int_{-1}^{1}f(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

下面按 3.11 节的方法把它再处理一遍, M 在 -1 和 1 处都是极限圆型的, 取 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, 让 φ 和 θ 分别是 Cauchy 问题

$$\begin{cases}M\varphi=\lambda\varphi,\\ \varphi(0,\lambda)=\sin\alpha=1,\\ \varphi'(0,\lambda)=-\cos\alpha=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}M\theta=\lambda\theta,\\ \theta(0,\lambda)=\cos\alpha=0,\\ \theta'(0,\lambda)=\sin\alpha=1\end{cases}$$

的解, 则

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x,\quad \theta(x,\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}.$$

对 $-1<a<0$ 和 $0<b<1$, 考虑分别满足边界条件

$$\cos\beta y(a)+\sin\beta y'(a)=0,\ \text{取}\ \beta=0\ \text{即}\ y(a)=0,$$

$$\cos\gamma y(b)+\sin\gamma y'(b)=0,\ \text{取}\ \gamma=0\ \text{即}\ y(b)=0$$

的解

$$\varphi(x,\lambda)+m_a(\lambda)\theta(x,\lambda)\ \text{和}\ \varphi(x,\lambda)+m_b(\lambda)\theta(x,\lambda),$$

它们在 0 点满足的边界条件是

$$\cos\alpha y(0)+\sin\alpha y'(0)=m_a(\lambda),\quad \text{即}\quad y'(0)=m_a(\lambda),$$

$$\cos\alpha y(0)+\sin\alpha y'(0)=m_b(\lambda),\quad \text{即}\quad y'(0)=m_b(\lambda).$$

它们分别就是 $[a,0]$ 和 $[0,b]$ 上的 Weyl 解, 由边界条件解得

$$m_a(\lambda)=-\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a}{\sin\sqrt{\lambda}a},\quad m_b(\lambda)=-\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}b}{\sin\sqrt{\lambda}b}.$$

于是

$$M_-(\lambda)=\lim_{a\to-1}m_a(\lambda)=\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}{\sin\sqrt{\lambda}},$$

$$M_+(\lambda)=\lim_{b\to1}m_b(\lambda)=-\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}{\sin\sqrt{\lambda}}=-M_-(\lambda),$$

故

$$M_{11}(\lambda)=\frac{1}{M_-(\lambda)-M_+(\lambda)}=\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}},$$

$$M_{12}(\lambda)=M_{21}(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\frac{M_-(\lambda)+M_+(\lambda)}{M_-(\lambda)-M_+(\lambda)}\right)=0,$$

$$M_{22}(\lambda)=\frac{M_-(\lambda)M_+(\lambda)}{M_-(\lambda)-M_+(\lambda)}=-\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}{2\sin\sqrt{\lambda}},$$

$M_{11}(\lambda)$ 的极点是

$$\lambda=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$\operatorname{Res}_{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}M_{11}(\lambda)=\lim_{\lambda\to\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\left(\lambda-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}=-1;$$

$M_{22}(\lambda)$ 的极点是

$$\lambda = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \cdots,$$
$$\mathrm{Res}_{n^2\pi^2} M_{22}(\lambda) = \lim_{\lambda \to n^2\pi^2} -(\lambda - n^2\pi^2)\frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}{2\sin\sqrt{\lambda}} = -n^2\pi^2.$$

这样, $\forall f \in L^2[-1,1]$ 便有展开式

$$\begin{aligned}
f(x) = & \int_{-1}^{1} \varphi(x,\lambda)\left(\int_{-1}^{1} f(s)\varphi(s,\lambda)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda) \\
& + \int_{-1}^{1} \theta(x,\lambda)\left(\int_{-1}^{1} f(s)\theta(s,\lambda)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\rho_{22}(\lambda) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\left(\int_{-1}^{1} f(s)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi s\mathrm{d}s\right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x\left(\int_{-1}^{1} f(s)\sin n\pi s\mathrm{d}s\right).
\end{aligned}$$

4.2.2　无限区间 $[0,\infty)$ 情形

$$M = -D^2, \quad x \in [0,\infty).$$

$-y'' = 0$ 的基本解组 $\{1, x\}$ 的两个函数都不属于 $L^2[0,\infty)$, M 在 ∞ 处是极限点型的, $T_0(M)$ 的亏指数为 $(1,1)$, 由 3.6 节, 它的自伴延拓 T 形如

$$\mathscr{D}(T) = \{\ f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \mid \sin\alpha f(0) - \cos\alpha f'(0) = 0\ \}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$
$$T = T_1(M)|_{\mathscr{D}(T)}.$$

设 φ 和 θ 满足

$$\begin{cases} M\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(0) = \sin\alpha, \\ \varphi'(0) = -\cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} M\theta = \lambda\theta, \\ \theta(0) = \cos\alpha, \\ \theta'(0) = \sin\alpha, \end{cases}$$

则

$$\varphi(x,\lambda) = \sin\alpha\cos\sqrt{\lambda}x - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x,$$

$$\theta(x,\lambda) = \cos\alpha\cos\sqrt{\lambda}x + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Weyl 解是

$$\psi(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + M(\lambda)\theta(x,\lambda) \in L^2[0,\infty).$$

下面来求 Weyl 函数 $M(\lambda)$, 由于 $M(\overline{\lambda})=\overline{M(\lambda)}$, 所以仅考虑 $\mathrm{Im}\lambda>0$, 设 $\lambda=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$, 则 $\sin\omega>0$, $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x}\}$ 是 $-y''=\lambda y$ 的基本解组, 其中,

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x}=\mathrm{e}^{\sqrt{r}(\sin\frac{\omega}{2}x-\mathrm{i}\cos\frac{\omega}{2}x)}\notin L^2[0,\infty),$$

故

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x}\in L^2[0,\infty),$$

而

$$\psi(x,\lambda)=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x}.$$

可是

$$\psi(x,\lambda)=(\sin\alpha+M(\lambda)\cos\alpha)\cos\sqrt{\lambda}x+\left(M(\lambda)\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\lambda}}-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)\sin\sqrt{\lambda}x,$$

于是

$$\begin{cases}\sin\alpha+M(\lambda)\cos\alpha=C,\\[2mm] -\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{\lambda}}+M(\lambda)\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{\lambda}}=\mathrm{i}C,\end{cases}$$

消去 C 解得

$$M(\lambda)=\frac{-\sqrt{\lambda}\sin\alpha+\mathrm{i}\cos\alpha}{\sqrt{\lambda}\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha}=\frac{(1-\lambda)\cos\alpha\sin\alpha+\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}{\lambda\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}.$$

为了求 T 的特征值, 要找 $M(\lambda)$ 的极点, 即解方程

$$\sqrt{\lambda}\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=0,\quad \lambda\in\mathbf{R}$$

或

$$\tan\alpha=\mathrm{i}\sqrt{\lambda},\quad \lambda\in\mathbf{R}.$$

(1) $\tan\alpha>0$.

$M(\lambda)$ 无极点, $\sigma_p(T)=\varnothing$, $\sigma(T)=\sigma_c(T)$. 由于

$$\mathrm{Im}M(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\lambda\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda<0,\end{cases}$$

按 Titchmarsh 公式

$$\mathrm{d}\rho(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\sqrt{\lambda}d\lambda}{\lambda\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda<0.\end{cases}$$

ρ 在 $(0,\infty)$ 上单调增加

$$\sigma(T)=\sigma_c(T)=[0,\infty).$$

记 $h=\tan\alpha$, 令 $\lambda=s^2$, 则

$$\begin{aligned}\theta(x,\lambda)&=\cos\alpha\cos sx+\sin\alpha\frac{\sin sx}{s}\\&=\cos\alpha\Big(\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}(s)&=\int_0^\infty f(x)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\int_0^\infty f(x)\Big(\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx\Big)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)\\&=\int_0^\infty \hat{f}(s)\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\Big(\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx\Big)\frac{1}{\pi}\frac{s}{s^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}2s\mathrm{d}s\\&=\frac{2\sqrt{1+h^2}}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(s)\Big(\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx\Big)\frac{s^2}{h^2+s^2}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

(2) $\tan\alpha=0,\ \alpha=0.$

$$\varphi(x,\lambda)=-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}},\quad \theta(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x,$$

$$M(\lambda)=\frac{i}{\sqrt{\lambda}},\quad \mathrm{Im}M(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda<0,\end{cases}$$

$$\mathrm{d}\rho(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\mathrm{d}\lambda, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda<0.\end{cases}$$

于是

$$\hat{f}(s)=\int_0^\infty f(x)\cos sx\mathrm{d}x,\quad f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(x)\cos sx\mathrm{d}s,$$

这就是熟知的 Fourier 余弦公式.

(3) $\tan\alpha<0$.

记 $h=\tan\alpha$, 这时 $\lambda=-h^2$ 是 $M(\lambda)$ 的极点, 因而是 T 的特征值, 对应的特征函数是

$$\begin{aligned}\theta(x,-h^2)&=\cos\alpha\Big(\cos\sqrt{-h^2}x+\frac{h}{\sqrt{-h^2}}\sin\sqrt{-h^2}x\Big)\\&=\cos\alpha\mathrm{e}^{hx}.\end{aligned}$$

因为

$$\int_0^\infty \cos^2\alpha e^{2hx}dx = \frac{\cos^2\alpha}{2|h|},$$

所以规范化了的特征函数是 $\sqrt{2|h|}e^{hx}$, $\lambda=-h^2$ 是 $\rho(\lambda)$ 的跃点, 跃度为

$$\frac{1}{\|\theta(\cdot,-h^2)\|^2} = \frac{2|h|}{\cos^2\alpha},$$

这样便有

$$\sigma(T) = \sigma_p(T)\cup\sigma_c(T) = \{-h^2\}\cup[0,\infty),$$

$$d\rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < -h^2, \\ 0, & -h^2 < \lambda < 0, \\ \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\sqrt{\lambda}d\lambda}{\lambda\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}, & \lambda > 0. \end{cases}$$

$\lambda>0$ 时, 令 $\lambda=s^2$,

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\int_0^\infty f(x)\Big(\cos sx + \frac{h}{s}\sin sx\Big)dx,$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)d\rho(\lambda) \\ &= \frac{2|h|}{\cos^2\alpha}\hat{f}(-h^2)\theta(x,-h^2) + \int_0^\infty \hat{f}(\lambda)\theta(x,\lambda)\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}d\lambda \\ &= 2|h|e^{hx}\int_0^\infty f(t)e^{ht}dt + \frac{2\sqrt{1+h^2}}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(s)\Big(\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx\Big)\frac{s^2}{h^2+s^2}ds. \end{aligned}$$

4.2.3 无限区间 $(-\infty,\infty)$ 情形

$$M = -D^2, \quad x\in(-\infty,\infty).$$

$-y''=0$ 的两个线性无关的解 1 和 x 都不属于 $L^2(-\infty,0]$ 和 $L^2[0,\infty)$, 所以 M 在 $\pm\infty$ 都是极限点型的, 因而由 Kodaira 公式, $T_0(M)$ 自伴.

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x, \quad \theta(x,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$$

满足

$$\begin{cases} M\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(0)=1, \\ \varphi'(0)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} M\theta=\lambda\theta, \\ \theta(0)=0, \\ \theta'(0)=1. \end{cases}$$

若 $\mathrm{Im}\lambda > 0$, 则记 $\lambda = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$, $\sin\omega > 0$, 而

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x} = \mathrm{e}^{\sqrt{r}x(-\sin\frac{\omega}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\omega}{2})} \in L^2[0,\infty),$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x} = \cos\sqrt{\lambda}x + \mathrm{i}\sin\sqrt{\lambda}x = \varphi(x,\lambda) + \mathrm{i}\sqrt{\lambda}\theta(x,\lambda),$$

故

$$M_+(\lambda) = \mathrm{i}\sqrt{\lambda}.$$

若 $\mathrm{Im}\lambda < 0$, 则 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x} \in L^2(-\infty, 0]$, 而

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x} = \cos\sqrt{\lambda}x - \mathrm{i}\sin\sqrt{\lambda}x = \varphi(x,\lambda) - \mathrm{i}\sqrt{\lambda}\theta(x,\lambda),$$

故

$$M_-(\lambda) = -\mathrm{i}\sqrt{\lambda}.$$

这样便有

$$M_{11}(\lambda) = \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{\lambda}}, \quad M_{12}(\lambda) = M_{21}(\lambda) = 0, \quad M_{22}(\lambda) = \frac{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}}{2}.$$

按 Titchmarsh 公式,

$$\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\sqrt{\lambda}}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}\rho_{22}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\lambda}\mathrm{d}\lambda}{2\pi}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases}$$

故

$$\sigma(T_0(M)) = \sigma_c(T_0(M)) = [0,\infty).$$

对任何 $f \in L^2(\mathbf{R})$, 记

$$g_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\sqrt{\lambda}x\mathrm{d}x, \quad g_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{d}x,$$

则

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\lambda)g_1(\lambda)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda) + \theta(x,\lambda)g_2(\lambda)\mathrm{d}\rho_{22}(\lambda) \\ &\overset{\lambda=s^2}{=} \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos st\mathrm{d}t\Big)\cos sx\mathrm{d}s + \int_0^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin st\mathrm{d}t\Big)\sin sx\mathrm{d}s\Big], \end{aligned}$$

这就是通常的 Fourier 积分公式.

4.3 Legendre 微分算式

4.3.1 Legendre 微分算式的亏指数

$$M=-D^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\tan^2 t,\quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

因为

$$\lim_{t\to\pm\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\tan^2 t\right)=-\infty,$$

所以 $\pm\frac{\pi}{2}$ 是奇型端点.

对方程 $Mu=\lambda u$, 作变换

$$x=\sin t,\quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$$
$$y=\frac{u}{\sqrt{\cos t}},$$

则

$$t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow x\in[-1,1],$$
$$u=y\sqrt{\cos t},$$
$$\dot{u}=y'(\cos t)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}y(\cos t)^{-\frac{1}{2}}\sin t,$$
$$\ddot{u}=y''(\cos t)^{\frac{5}{2}}-2y'(\cos t)^{\frac{1}{2}}\sin t-\frac{1}{4}y(\cos t)^{-\frac{3}{2}}\sin^2 t-\frac{1}{2}y(\cos t)^{\frac{1}{2}}.$$

于是 $Mu=\lambda u$ 变成

$$-y''\cos^2 t+2y'\sin t=\lambda y,$$

即

$$-(1-x^2)y''+2xy'=\lambda y,$$
$$-\big((1-x^2)y'\big)'=\lambda y,\quad x\in[-1,1],$$
$$M=-D(1-x^2)D,\quad x\in[-1,1].$$

求

$$-\big((1-x^2)y'\big)'=0$$

的基本解组. 显然

$$y_1(x)\equiv 1,\quad x\in[-1,1]$$

是一个, $y_1\in L^2[-1,1]$. 而由

$$(1-x^2)y_2' = C,$$

$$y_2' = \frac{C}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

得另一个

$$y_2 = \frac{C}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

由于在 $x=1$ 附近,

$$y_2 = O(\,|\ln(1-x)|\,),$$

而 $\ln^2 x$ 在 0 附近是可积的, $x=-1$ 的情况类似, 故 $y_2 \in L^2[-1,1]$.

因此两个线性无关的解都属于 $L^2[-1,1]$, 表示 M 在 ± 1 都是极限圆型, 亏指数为 $(2,2)$.

4.3.2　$T_0(M)$ 的自伴延拓

因为

$$\mathscr{D}(T) = \left\{\, u \in \mathscr{D}(T_1(M)) \mid u\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0 \,\right\},$$

$$T = T_1(M)|_{\mathscr{D}(T)}$$

是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓, 而由

$$u = y\sqrt{\cos t},\quad u\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

知

$$\mathscr{D}(T) = \{y \in \mathscr{D}(T_1(M)) \mid \lim_{x\to\pm 1} y(x)\sqrt{\cos\arccos x} = 0\},$$

$$T = T_1(M)|_{\mathscr{D}(T)}$$

是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓. 由于是极限圆型的, T 有纯点谱, $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. 另外, 因为

$$(Tf,f) = \int_{-1}^{1} -\big((1-x^2)f'(x)\big)'\overline{f(x)}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)|f'(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

T 是下半有界的, 所以 $\sigma(T) \subset [0,\infty)$.

4.3.3　$My=\lambda y$ 的基本解组

由线性齐次常微分方程的 Fuchs 理论, 0 点是方程 $My-\lambda y=0$ 的正常点, 下面来求它的幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

比较系数得

$$2a_2 + \lambda a_0 = 0,$$
$$3 \cdot 2a_3 + (\lambda - 2)a_1 = 0,$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda - n(n+1))a_n = 0, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

这样得到两个解. 取 $a_0 = 1, \ a_1 = 0,$

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

得

$$y_1(x) = 1 + \frac{-\lambda}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(-\lambda)(2 \cdot 3 - \lambda)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \cdots,$$

取 $a_0 = 0, \ a_1 = 1$ 得

$$y_2(x) = x + \frac{1 \cdot 2 - \lambda}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{(1 \cdot 2 - \lambda)(3 \cdot 4 - \lambda)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \cdots.$$

$y_1(x)$ 是偶函数, $y_2(x)$ 是奇函数, 它们线性无关.

4.3.4 $\boldsymbol{\sigma(T)=\sigma_p(T)=\{n(n+1)|n=0,1,2,\cdots\}}$

由

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n = \frac{1}{n+2}\left(1 - \frac{\lambda}{n(n+1)}\right) n a_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

当 $\lambda = n(n+1)$ 时, y_1 或 y_2 中有一个是 n 阶多项式, 在 $[-1, 1]$ 上平方可积, 所以 $n(n+1), \ n = 0, 1, 2, \cdots$ 是特征值. 如果 $0 < \lambda \neq n(n+1), \ n = 0, 1, 2, \cdots$, 则 y_1 和 y_2 都是无穷级数, 考虑其收敛性. 记

$$\lambda = \alpha(\alpha + 1), \quad \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2},$$

则

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} a_0,$$
$$a_3 = \frac{-\alpha(\alpha+1) + 1 \cdot 2}{2 \cdot 3} a_1,$$
$$a_{n+2} = \frac{-\alpha(\alpha+1) + n(n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n = -\frac{(\alpha - n)(\alpha + n + 1)}{(n+1)(n+2)} a_n,$$

于是

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{(\alpha - 2n + 2)(\alpha - 2n + 4) \cdots (\alpha - 2)\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 3) \cdots (\alpha + 2n - 1)}{(2n)!} a_0,$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\alpha - 2n + 1)(\alpha - 2n + 3) \cdots (\alpha - 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + 2n - 2)(\alpha + 2n)}{(2n+1)!} a_1.$$

由于

$$\left|\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}}\right| = \left|-\frac{(\alpha-2n+2)(\alpha+2n-1)}{(2n-1)(2n)}\right| \to 1,$$

$$\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\right| = \left|-\frac{(\alpha-2n+1)(\alpha+2n)}{2n(2n+1)}\right| \to 1,$$

根据 d'Alembert 判别法, 无穷级数在 $|x|<1$ 时绝对收敛, 在 $|x|>1$ 时发散. 在端点 ± 1 可用 Gauss 判别法,

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n-2}}{a_{2n}} &= \Big(1-\frac{1}{2n}\Big)\Big(1-\frac{\alpha+2}{2n}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{\alpha-1}{2n}\Big)^{-1}\\ &= \Big(1-\frac{1}{2n}\Big)\Big(1+\frac{\alpha+2}{2n}+\Big(\frac{\alpha+2}{2n}\Big)^2+\cdots\Big)\Big(1-\frac{\alpha-1}{2n}+\Big(\frac{\alpha-1}{2n}\Big)^2-\cdots\Big)\\ &= 1+\frac{1}{n}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\alpha+2}{2}-\frac{\alpha-1}{2}\Big)+\frac{\mu}{n^2}\\ &= 1+\frac{1}{n}+\frac{\mu}{n^2},\end{aligned}$$

所以 y_1 在 $x=1$ 发散, 由偶性, 在 $x=-1$ 也发散. 类似地, y_2 在 $x=\pm 1$ 也发散. 当 $n=k+2l$ 时, 由于

$$a_n = \frac{1}{n}\Big(1-\frac{\lambda}{(n-2)(n-1)}\Big)\Big(1-\frac{\lambda}{(n-4)(n-3)}\Big)\cdots\Big(1-\frac{\lambda}{k(k+1)}\Big)ka_k,$$

设 k 是一个固定的大自然数, 使得上面的那些乘积因子都是正的, 那么当 $n\to\infty$ 时, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛而得

$$\Big(1-\frac{\lambda}{(n-2)(n-1)}\Big)\Big(1-\frac{\lambda}{(n-4)(n-3)}\Big)\cdots\Big(1-\frac{\lambda}{k(k+1)}\Big) \to \gamma > 0.$$

于是当 $n>k$ 时,

$$a_n > \frac{k}{n}a_k\gamma = \frac{\beta}{n}.$$

这样在 $x=1$ 附近,

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n \text{ 无界},$$

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \notin \mathscr{D}(T)$, 因而 λ 不是特征值. 于是

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\ n(n+1)\ |\ n=0,1,2,\cdots\}.$$

4.3.5 Legendre 多项式 $P_n(x)$, Rodrigues 公式

来求对应于 $n(n+1)$ 的特征函数, 由于

$$a_{n+2}=\frac{1}{n+2}\Big(1-\frac{n(n+1)}{n(n+1)}\Big)na_n=0.$$

对应于 $n(n+1)$ 的特征函数是个 n 阶多项式, 称之为 Legendre 多项式. 由

$$a_n=\frac{(n-2)(n-1)-n(n+1)}{(n-1)n}a_{n-2}$$

得

$$a_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n.$$

由

$$a_{n-2}=\frac{(n-4)(n-3)-n(n+1)}{(n-3)(n-2)}a_{n-4}$$

得

$$a_{n-4}=(-1)^2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}a_n.$$

一般地,

$$a_{n-2r}=(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2r+1)}{2\cdot 4\cdots(2r)(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2r+1)}a_n,$$

所以

$$\begin{aligned}P_n(x)&=a_n\Big(x^n+(-1)\frac{n!(2n-3)!!}{2(n-2)!(2n-1)!!}x^{n-2}+\cdots\\&\quad+(-1)^r\frac{n!(2n-2r-1)!!}{2^r r!(n-2r)!(2n-1)!!}x^{n-2r}+\cdots\Big)\\&=a_n\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\frac{n!(2n-2r-1)!!}{2^r r!(n-2r)!(2n-1)!!}x^{n-2r}.\end{aligned}$$

下面来找 $P_n(x)$ 的简单形式, 因为

$$\begin{aligned}\frac{n!(2n-2r-1)!!}{2^r r!(n-2r)!(2n-1)!!}&=\frac{n!(2n-2r-1)!!}{2^r r!(n-2r)!(2n-1)!!}\cdot\frac{(2n-2r)!!}{2^{n-r}(n-r)!}\\&=\frac{n!(2n-2r)!}{2^n r!(n-2r)!(n-r)!(2n-1)!!}\\&=\frac{n!(2n-2r)!2^n n!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!(2n)!!(2n-1)!!}\\&=\frac{(n!)^2(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!(2n)!}\\&=\frac{1}{2^n}\binom{n}{r}\frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}\end{aligned}$$

而

$$\frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}x^{n-2r}=(2n-2r)(2n-2r-1)\cdots(n-2r+1)x^{n-2r}$$
$$=(x^{2n-2r})^{(n)},$$

故

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\frac{a_n}{2^n}\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\binom{n}{r}(x^{2n-2r})^{(n)}\\&=\frac{a_n}{2^n}\left(\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}x^{2n-2r}\right)^{(n)}\\&=\frac{a_n}{2^n}\Big((x^2-1)^n\Big)^{(n)}.\end{aligned}$$

取 $a_n=\dfrac{1}{n!}$ 得

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\Big((x^2-1)^n\Big)^{(n)},$$

Legendre 多项式的这个微商表示通常称为 Rodrigues 公式. 前几个 Legendre 多项式是

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2},\quad P_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2},$$
$$P_4(x)=\frac{35x^4-30x^2+3}{8},\quad P_5(x)=\frac{63x^5-70x^3+15x}{8}.$$

4.3.6　$P_n(x)$ 的规范化 $\psi_n(x)$

记 $y_n=(x^2-1)^n$, 则用分部积分法可得

$$\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1},$$

故

$$\psi_n(x)=\sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n(x),\quad n=0,1,2,\cdots,$$

它们组成了 $L^2[-1,1]$ 的规范正交基, 任何 $f\in L^2[-1,1]$ 都有展开式

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}(f,\psi_n)\psi_n.$$

4.4　Bessel 微分算式

本节讨论 Bessel 微分算式

$$M=-D^2+\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}$$

在不同区间上生成的自伴算子的谱与按特征函数的展开式.

4.4.1 Bessel 函数

对微分方程 $My=\lambda y$ 作变换 $y=\sqrt{x}z$, 有

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}z+x^{\frac{1}{2}}z',$$

$$y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}z+x^{-\frac{1}{2}}z'+x^{\frac{1}{2}}z'',$$

代入方程得

$$x^2z''+xz'+(\lambda x^2-\nu^2)z=0$$

或

$$z''+\frac{1}{x}z'+\left(\lambda-\frac{\nu^2}{x^2}\right)z=0,$$

这是标准的 Bessel 微分方程. 来求它的基本解组, 先作一个自变量的变换将 λ 隐去: $\sqrt{\lambda}x=t$,

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\lambda}x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\sqrt{\lambda}x}=t\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},$$

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=(\sqrt{\lambda}x)^2\frac{\mathrm{d}^2z}{(\mathrm{d}\sqrt{\lambda}x)^2}=t^2\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}.$$

于是得

$$t^2\ddot{z}+t\dot{z}+(t^2-\nu^2)z=0,$$

$$\ddot{z}+\frac{1}{t}\dot{z}+\left(1-\frac{\nu^2}{t^2}\right)z=0.$$

按 Fuchs 理论, 点 x_0 称为方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的正则奇点, 如果方程的基本解组形如

$$y_1(x)=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad a_0\neq 0,$$

$$y_2(x)=by_1(x)\ln(x-x_0)+(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n,\quad b_0\neq 0.$$

Fuchs 证明了 x_0 是方程的正则奇点的充要条件是 $(x-x_0)p(x)$ 和 $(x-x_0)^2q(x)$ 在 x_0 邻域内解析, 这时解的级数形式是

$$y(x)=(x-x_0)^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad a_0\neq 0,$$

其中, ρ 满足指标方程

$$\rho(\rho-1)+\alpha_0\rho+\beta_0=0,$$

这里 α_0, β_0 是 $(x-x_0)p(x)$ 和 $(x-x_0)^2q(x)$ 解析展开的常数项系数

$$(x-x_0)p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x-x_0)^n,\quad (x-x_0)^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(x-x_0)^n.$$

现在

$$tp(t)=1,\quad t^2q(t)=t^2-\nu^2,$$

所以 $t=0$ 是正则奇点, 相应的 $\alpha_0=1$, $\beta_0=-\nu^2$, 这时指标方程是

$$\rho^2-\nu^2=0.$$

来求它们的两个线性无关的解.

1. ν 不是整数的情形

设

$$z_1(t)=t^\nu\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n,\quad a_0\neq 0,$$

代入方程得

$$t^2\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)(\nu+n-1)a_nt^{\nu+n-2}+t\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)a_nt^{\nu+n-1}+(t^2-\nu^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{\nu+n}=0,$$

比较 t 的不同方幂的系数, 有

$$\begin{aligned}&(\nu(\nu-1)+\nu-\nu^2)a_0=0,\\&((\nu+1)\nu+(\nu+1)-\nu^2)a_1=0,\\&((\nu+n)(\nu+n-1)+(\nu+n)-\nu^2)a_n+a_{n-2}=0,\quad n=2,3,\cdots.\end{aligned}$$

解之得

$$\begin{aligned}&a_0\text{任意},\\&a_1=0,\\&a_n=-\frac{a_{n-2}}{(2\nu+n)n},\quad n=2,3,\cdots.\end{aligned}$$

利用最后这个递推关系有

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0,$$

而

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{1}{4n(\nu+n)}a_{2n-2} = \cdots = (-1)^n \frac{1}{4^n n!(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)}a_0 \\ &= (-1)^n \frac{1}{2^{2n}\Gamma(n+1)(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)}a_0. \end{aligned}$$

通常取

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},$$

则有

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n+\nu}\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)},$$

因而

$$z_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

由 d'Alembert 判别法, 幂级数部分的收敛半径是 ∞. 把这个函数记成 $J_\nu(t)$, 称为 ν 阶 Bessel 函数. 类似地得另一解 ——$-\nu$ 阶 Bessel 函数

$$z_2(t) = J_{-\nu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\nu+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu},$$

当 $\nu \notin \mathbf{Z}$ 时, $\{J_\nu(t),\ J_{-\nu}(t)\}$ 组成了 Bessel 方程的基本解组. 一般称

$$J_\nu(t), \quad \nu \in \mathbf{R}$$

是第一类 Bessel 函数.

2. ν 是整数的情形

$J_\nu(t)$ 确定如前. 至于 $J_{-\nu}(t)$, 因为 $\Gamma(s)$ 在 $s = 0, -1, -2, \cdots$ 有简单极点, 所以

$$\Gamma(-\nu+n+1) = \infty, \quad n = 0, 1, \cdots, \nu-1.$$

于是

$$\begin{aligned} J_{-\nu}(t) &= \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\nu+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu} \\ &\overset{n=\nu+l}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+l}}{\Gamma(\nu+l+1)\Gamma(l+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2l+\nu} \\ &= (-1)^\nu J_\nu(t). \end{aligned}$$

这时 $J_\nu(t)$ 与 $J_{-\nu}(t)$ 线性相关, 所以还必须找另一个线性无关的解. 考虑

$$Y_\nu(t)=\frac{\cos\nu\pi J_\nu(t)-J_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi},$$

当 ν 不是整数时, $\{J_\nu(t),\ Y_\nu(t)\}$ 也组成 Bessel 方程的基本解组, 后者称为 Neumann 函数或第二类 Bessel 函数.

当 ν 是整数时, $Y_\nu(t)$ 成了未定式, 用 l'Hospital 法则来得出另一个线性无关的解 (即所谓的 Frobenius 方法, 参见 G. N. Watson,《Theory of Bessel Functions》, Cambridge,1944).

$$\begin{aligned}Y_\nu(t)&=\lim_{k\to\nu}Y_k(t)=\lim_{k\to\nu}\frac{\dfrac{\partial J}{\partial k}\cos k\pi-\pi J_k(t)\sin k\pi-\dfrac{\partial J_{-k}}{\partial k}}{\pi\cos k\pi}\\&=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{\partial J_k}{\partial k}\Big)\Big|_{k=\nu}-\frac{(-1)^\nu}{\pi}\Big(\frac{\partial J_{-k}}{\partial k}\Big)\Big|_{k=\nu}.\end{aligned}$$

下面来求它的表达式.

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_k}{\partial k}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big[\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(k+n+1)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+k}\ln\frac{t}{2}-\frac{\Gamma'(k+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma^2(k+n+1)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+k}\Big]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(k+n+1)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+k}\Big[\ln\frac{t}{2}-\psi(k+n+1)\Big],\end{aligned}$$

其中,

$$\psi(s)=\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}.$$

当 $k\to\nu$ 时,

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial J_k}{\partial k}\Big)\Big|_{k=\nu}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+\nu}\Big[\ln\frac{t}{2}-\psi(\nu+n+1)\Big]\\&=\ln\frac{t}{2}J_\nu(t)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!}\psi(\nu+n+1)\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+\nu}.\end{aligned}$$

另外,

$$J_{-k}(t)=\sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-k+n+1)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n-k}+\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-k+n+1)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n-k},$$

由

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi},$$

有

$$\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k}}{\Gamma(-k+n+1)} = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k}\sin(k-n)\pi\Gamma(k-n)}{\pi}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial k}\Big[\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k}\sin(k-n)\pi\Gamma(k-n)}{\pi}\Big]_{k=\nu}\\
&=\Big[\frac{-\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k}\ln\frac{t}{2}\sin(k-n)\pi\Gamma(k-n)}{\pi}+\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k}\sin(k-n)\pi\Gamma'(k-n)}{\pi}\\
&\quad+\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-k}\cos(k-n)\pi\Gamma(k-n)\Big]_{k=\nu}\\
&=\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu}\cos(\nu-n)\pi\Gamma(\nu-n)\\
&=(-1)^{\nu-n}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu}\Gamma(\nu-n),
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial J_{-k}}{\partial k}\right)_{k=\nu}=&\sum_{n=0}^{\nu-1}(-1)^{\nu}\frac{(\nu-n-1)!}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu}\\
&+\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\nu+n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu}\Big[-\ln\frac{t}{2}+\psi(-\nu+n+1)\Big]\\
=&(-1)^{\nu}\sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{(\nu-n-1)!}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu}+(-1)^{\nu-1}\ln\frac{t}{2}J_\nu(t)\\
&+(-1)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\psi(n+1)}{n!(\nu+n)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}.
\end{aligned}$$

综合起来得到 ν 为整数时 Neumann 函数的表达式

$$\begin{aligned}
Y_\nu(t)=&\frac{2}{\pi}\ln\frac{t}{2}J_\nu(t)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{(\nu-n-1)!}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu}\\
&-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\psi(\nu+n+1)+\psi(n+1))}{n!(\nu+n)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu},
\end{aligned}$$

$\nu=0$ 时, $-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{(\nu-n-1)!}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\nu}$ 不出现.

引理 4.4.1(Lommel 公式)

$$W(J_\nu,Y_\nu)=\frac{2}{\pi x}.$$

证明

$$J_\nu''+\frac{1}{x}J_\nu'+\Big(1-\frac{\nu^2}{x^2}\Big)J_\nu=0,$$

$$J_{-\nu}''+\frac{1}{x}J_{-\nu}'+\Big(1-\frac{\nu^2}{x^2}\Big)J_{-\nu}=0,$$

$$J_\nu''J_{-\nu}-J_\nu J_{-\nu}''+\frac{1}{x}(J_\nu'J_{-\nu}-J_\nu J_{-\nu}')=0,$$

$$(J_\nu'J_{-\nu}-J_\nu J_{-\nu}')'+\frac{1}{x}(J_\nu'J_{-\nu}-J_\nu J_{-\nu}')=0,$$

所以

$$J_\nu'J_{-\nu}-J_\nu J_{-\nu}'=\frac{C}{x}.$$

下面定常数 C, 由于在 0 点附近,

$$J_\nu(x)=\frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}(1+O(x^2)),\quad J_\nu'(x)=\frac{x^{\nu-1}}{2^\nu\Gamma(\nu)}(1+O(x^2)),$$

$$J_{-\nu}(x)=\frac{x^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}(1+O(x^2)),\quad J_{-\nu}'(x)=\frac{x^{-\nu-1}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu)}(1+O(x^2)),$$

所以

$$\begin{aligned}W(J_\nu,J_{-\nu})&=\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)}-\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(-\nu+1)}\Big)+O(x)\\&=\frac{1}{x}\Big(-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\Big)+O(x)\\&=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}+O(x),\end{aligned}$$

故

$$C=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}.$$

当 ν 不是整数时,

$$W(J_\nu,Y_\nu)=\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}W(J_\nu,J_\nu)-\frac{1}{\sin\nu\pi}W(J_\nu,J_{-\nu})=\frac{2}{\pi x},$$

可是 $W(J_\nu,Y_\nu)$ 是 ν 的连续函数, 故上式对 ν 是整数也成立.

定理 4.4.1　$My=\lambda y$ 的基本解组是 $\{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x),\sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)\}$.

4.4.2　(0,1] 上 Bessel 微分算子的特征展开

1. $T_0(M)$ 的亏指数

定理 4.4.2　$(0,1]$ 上 Bessel 微分算子 $T_0(M)$ 的亏指数是

$$\begin{cases}(2,2),\quad 0\leqslant\nu<1,\\(1,1),\quad \nu\geqslant 1.\end{cases}$$

证明 $My = \mathrm{i}y$ 的基本解组是 $\{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\mathrm{i}}x), \sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\mathrm{i}}x)\}$, $\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\mathrm{i}}x)$ 在 $(0,1]$ 上对一切 $\nu \geqslant 0$ 都有界, 所以平方可积. $\sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\mathrm{i}}x)$ 在 0 附近等价于

$$\begin{cases} \sqrt{x}\ln x, & \nu = 0, \\ x^{\frac{1}{2}-\nu}, & \nu > 0. \end{cases}$$

由于

$$\int_0 (\sqrt{x}\ln x)^2 \mathrm{d}x < \infty,$$

当 $0 < \nu < 1$ 时,

$$\int_0 (x^{\frac{1}{2}-\nu})^2 \, \mathrm{d}x < \infty,$$

所以当 $0 \leqslant \nu < 1$ 时, 基本解组的两个解都平方可积, 这时亏指数是 $(2,2)$. 当 $\nu \geqslant 1$ 时,

$$\int_0 (x^{\frac{1}{2}-\nu})^2 \, \mathrm{d}x = \infty,$$

只有一个解是平方可积的, 这时亏指数是 $(1,1)$.

2. $T_0(M)$ 的自伴延拓

(1) $\nu \geqslant 1$ 情形.

$T_0(M)$ 是极限点型的, 故

$$\mathscr{D}(T) = \{ f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \mid \cos\alpha f(1) - \sin\alpha f'(1) = 0 \}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$
$$T = T_1(M)|_{\mathscr{D}(T)}$$

便是 $T_0(M)$ 全部的自伴延拓.

(2) $0 < \nu < 1$ 情形.

$\{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\mathrm{i}}x), \sqrt{x}J_{-\nu}(\sqrt{\mathrm{i}}x)\}$ 是 $My = \mathrm{i}y$ 的基本解组, 在 0 点附近,

$$\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\mathrm{i}}x) \sim x^{\frac{1}{2}+\nu}(1 + O(x^2)),$$

$$\sqrt{x}J_{-\nu}(\sqrt{\mathrm{i}}x) \sim x^{\frac{1}{2}-\nu}(1 + O(x^2)),$$

它们都平方可积, $T_0(M)$ 是极限圆型的. 取 $h_i \in C^\infty(0,1]$, $\operatorname{supp} h_i \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$, 使得

$$h_1(x) = x^{\frac{1}{2}+\nu}, \quad x \in \left(0, \frac{1}{4}\right),$$

$$h_2(x) = x^{\frac{1}{2}-\nu}, \quad x \in \left(0, \frac{1}{4}\right),$$

则 h_1, $h_2 \in L^2(0,1]$. 而

$$\begin{aligned}
\langle h_1, h_1\rangle &= [h_1, h_1]_0^1 = -[h_1, h_1](0) = -W(h_1, h_1)(0) = 0, \\
\langle h_2, h_2\rangle &= 0, \\
\langle h_1, h_2\rangle &= -[h_1, h_2](0) = -\lim_{x\to+0}\left(\left(\frac{1}{2}-\nu\right)x^{\frac{1}{2}+\nu}x^{-\frac{1}{2}-\nu}\right. \\
&\quad \left. -\left(\frac{1}{2}+\nu\right)x^{-\frac{1}{2}+\nu}x^{\frac{1}{2}-\nu}\right) = 2\nu, \\
\langle h_2, h_1\rangle &= -2\nu,
\end{aligned}$$

在 0 点附近,

$$Mh_1 = Mh_2 = 0,$$

所以

$$h_1, h_2 \in \mathscr{D}(T_1(M)).$$

另外, 取 $h_3, h_4 \in C^\infty(0,1]$, $\mathrm{supp}h_3$, $\mathrm{supp}h_4 \subset \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 且

$$\begin{aligned}
h_3(1) &= 1, \quad h_3'(1) = 0, \\
h_4(1) &= 0, \quad h_4'(1) = 1,
\end{aligned}$$

则 $h_3, h_4 \in \mathscr{D}(T_1(M))$. 而

$$\begin{aligned}
\langle h_3, h_3\rangle &= \langle h_4, h_4\rangle = 0, \\
\langle h_3, h_4\rangle &= [h_3, h_4](1) = W(h_3, h_4)(1) = 1, \\
\langle h_4, h_3\rangle &= -1.
\end{aligned}$$

令

$$f_1 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2, \quad f_2 = \alpha_3 h_3 + \alpha_4 h_4,$$

其中, α_1, α_2 不同时为 0, α_3, α_4 也不同时为 0. 那么 $f_1, f_2 \in \mathscr{D}(T_1(M))$, 不难算得

$$\langle f_1, f_1\rangle = \langle f_1, f_2\rangle = \langle f_2, f_2\rangle = 0$$

且若 α_2 和 α_3 不为 0, 则对 $h_1, h_4 \in \mathscr{D}(T_1(M))$ 有

$$\begin{vmatrix} \langle f_1, h_1\rangle & \langle f_1, h_4\rangle \\ \langle f_2, h_1\rangle & \langle f_2, h_4\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\nu\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} = -2\nu\alpha_2\alpha_3 \neq 0,$$

故 $\{f_1, f_2\}$ 模 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 线性无关, 按自伴延拓的 Calkin 描述,

$$\mathscr{D}(T) = \{\ f \in \mathscr{D}(T_1(M)) \mid \langle f, f_1\rangle = \langle f, f_2\rangle = 0\ \},$$
$$T = T_1(M))|_{\mathscr{D}(T)}$$

是 $T_0(M)$ 的自伴延拓, 其中, 边界条件 $\langle f, f_2\rangle = 0$, 即

$$[f, f_2](1) = 0.$$

这就是形如

$$\cos\alpha f(1) - \sin\alpha f'(1) = 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

的加在常型端点的边界条件, 而 $\langle f, f_1\rangle = 0$ 当 $\alpha_1 = 0$ 时, 即

$$[f, h_2](0) = 0,$$

这是一个加在奇型端点的边界条件

$$\lim_{x\to+0}\left(\left(\frac{1}{2}-\nu\right)x^{-\frac{1}{2}-\nu}f(x) - x^{\frac{1}{2}-\nu}f'(x)\right) = 0,$$

这一自伴延拓是由分离性边界条件决定的.

(3) $\nu = 0$ 情形.

与 (2) 类似, 只要注意在 0 点附近,

$$\sqrt{x}J_0(\sqrt{\mathrm{i}}x) \sim x^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{x}Y_0(\sqrt{\mathrm{i}}x) \sim x^{\frac{1}{2}}\ln x$$

即可.

3. Fourier-Bessel 展开

(1) $\nu \geqslant 1$ 情形.

设 T 是 $T_0(M)$ 的自伴延拓,

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) | f(1) = 0\},$$

取 $\varphi(x,\lambda), \theta(x,\lambda)$ 为如下:

$$\begin{cases} M\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(1) = 1, \\ \varphi'(1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} M\theta = \lambda\theta, \\ \theta(1) = 0, \\ \theta'(1) = -1, \end{cases}$$

则

$$\theta(x,\lambda) = \frac{\pi}{2}\sqrt{x}\left(Y_\nu(\sqrt{\lambda})J_\nu(\sqrt{\lambda}x) - J_\nu(\sqrt{\lambda})Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)\right),$$

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{1}{2}\theta(x,\lambda) + \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\sqrt{x}\left(Y_\nu'(\sqrt{\lambda})J_\nu(\sqrt{\lambda}x) - J_\nu'(\sqrt{\lambda})Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)\right),$$

Weyl 解是

$$\begin{aligned}\psi(x,\lambda)&=\varphi(x,\lambda)+M(\lambda)\theta(x,\lambda)\\&=\left(\frac{\pi}{4}Y_\nu(\sqrt{\lambda})+\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}Y_\nu'(\sqrt{\lambda})+\frac{\pi}{2}M(\lambda)Y_\nu(\sqrt{\lambda})\right)\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x)\\&\quad+\left(-\frac{\pi}{4}J_\nu(\sqrt{\lambda})-\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}J_\nu'(\sqrt{\lambda})-\frac{\pi}{2}M(\lambda)J_\nu(\sqrt{\lambda})\right)\sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\lambda}x).\end{aligned}$$

因为 $\sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ 不是平方可积的, 故

$$M(\lambda)=-\frac{\frac{\pi}{4}J_\nu(\sqrt{\lambda})+\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}J_\nu'(\sqrt{\lambda})}{\frac{\pi}{2}J_\nu(\sqrt{\lambda})}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\lambda}J_\nu'(\sqrt{\lambda})}{J_\nu(\sqrt{\lambda})},$$

这是一个半纯函数, 所以由定理 3.7.6, T 有纯点谱, 特征值是 $M(\lambda)$ 的极点, 即 $J_\nu(\sqrt{\lambda})$ 的零点. 由于“$\forall\nu\in\mathbf{R}, J_\nu(z)$ 都有无穷多个实零点”和“当 $\nu>-1$ 时, $J_\nu(z)$ 的零点都是实数”(参见文献 [1], 第七章 §18 466 页和 469 页), 所以 T 的特征值都是非负的, 设为 $\lambda_n, n=1,2,\cdots$, 谱函数 ρ 在 λ_n 处的跃度

$$\begin{aligned}\rho(\lambda_n+0)-\rho(\lambda_n-0)&=-\mathrm{Res}_{\lambda_n}M\\&=\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda-\lambda_n)\frac{\sqrt{\lambda}J_\nu'(\sqrt{\lambda})}{J_\nu(\sqrt{\lambda})}\\&=\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\sqrt{\lambda}J_\nu'(\sqrt{\lambda})+(\lambda-\lambda_n)(\sqrt{\lambda}J_\nu'(\sqrt{\lambda}))'}{\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}J_\nu'(\sqrt{\lambda})}\\&=2\lambda_n,\end{aligned}$$

故特征值都是正的, 根据定理 3.9.3, 对应于 λ_n 的特征函数是 $\theta(x,\lambda_n)$, 而 ρ 的跃度是 $\dfrac{1}{\|\theta(\cdot,\lambda_n)\|^2}$, 于是规范的特征函数是

$$\varphi_n(x)=\sqrt{2\lambda_n}\theta(x,\lambda_n),\quad n=1,2,\cdots.$$

可是

$$\begin{vmatrix}J_\nu(\sqrt{\lambda_n}) & Y_\nu(\sqrt{\lambda_n})\\J_\nu'(\sqrt{\lambda_n}) & Y_\nu'(\sqrt{\lambda_n})\end{vmatrix}=\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}},$$

即

$$-J_\nu'(\sqrt{\lambda_n})Y_\nu(\sqrt{\lambda_n})=\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}},$$

$$Y_\nu(\sqrt{\lambda_n})=-\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}J_\nu'(\sqrt{\lambda_n})},$$

故

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2\lambda_n} \cdot \frac{\pi}{2}\left(-\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}J'_\nu(\sqrt{\lambda_n})}\right)\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda_n}x)$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{J'_\nu(\sqrt{\lambda_n})}\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda_n}x).$$

$L^2(0,1]$ 的函数 f 按特征函数的展开是

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(J'_\nu(\sqrt{\lambda_n}))^2}\left(\int_0^1 f(t)\sqrt{t}J_\nu(\sqrt{\lambda_n}t)\mathrm{d}t\right)\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda_n}x),$$

这就是所谓的 Fourier-Bessel 展开.

(2) $0<\nu<1$ 情形.

$\nu = \frac{1}{2}$ 时, Bessel 算子退化成 $-D^2$, 对应的特征展开就是通常的 Fourier 展开, 所以假定 $\nu \neq \frac{1}{2}$. $T_0(M)$ 是极限圆型的, 考虑它的具分离型边界条件自伴延拓 T

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M)) | f(1) = 0 \text{及另一涉及 0 点的边界条件}\},$$

设 θ 与 φ 满足

$$\begin{cases} M\theta = \lambda\theta, \\ \theta(1) = 0, \\ \theta'(1) = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} M\varphi = \lambda\varphi, \\ \varphi(1) = 1, \\ \varphi'(1) = 0, \end{cases}$$

$\{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x), \sqrt{x}J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}x)\}$ 是 $My = \lambda y$ 的基本解组, 由于

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x},$$

故

$$\theta(x,\lambda) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\sqrt{x}\left(J_\nu(\sqrt{\lambda})J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}x) - J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})J_\nu(\sqrt{\lambda}x)\right),$$

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{1}{2}\theta(x,\lambda) + \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2\sin\nu\pi}\sqrt{x}\left(J'_\nu(\sqrt{\lambda})J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}x) - J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda})J_\nu(\sqrt{\lambda}x)\right).$$

这时 Weyl 函数 $M(\lambda)$ 是 $a \to 0$ 时,

$$m(\lambda, a, \beta) = -\frac{\cot\beta\,\varphi(a,\lambda) + \varphi'(a,\lambda)}{\cot\beta\,\theta(a,\lambda) + \theta'(a,\lambda)}, \quad 0<\beta<\pi$$

的极限.

$$
\begin{aligned}
&\cot\beta\,\varphi(a,\lambda)+\varphi'(a,\lambda)\\
=&\frac{1}{2}\Big(\cot\beta\,\theta(a,\lambda)+\theta'(a,\lambda)\Big)\\
&+\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2\sin\nu\pi}\Big[J'_{\nu}(\sqrt{\lambda})\Big(\cot\beta\sqrt{a}\,J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}a)+\sqrt{\lambda}\sqrt{a}\,J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda}a)+\frac{1}{2\sqrt{a}}J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}a)\Big)\\
&-J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda})\Big(\cot\beta\sqrt{a}\,J_{\nu}(\sqrt{\lambda}a)+\sqrt{\lambda}\sqrt{a}\,J'_{\nu}(\sqrt{\lambda}a)+\frac{1}{2\sqrt{a}}J_{\nu}(\sqrt{\lambda}a)\Big)\Big],
\end{aligned}
$$

故

$$
m(\lambda,a,\beta)=-\frac{1}{2}-\frac{\text{分子}}{\text{分母}},
$$

分别计算分子与分母,

$$
\begin{aligned}
\text{分子}=&\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2\sin\nu\pi}\Big[J'_{\nu}(\sqrt{\lambda})\Big(\frac{(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}a^{-\nu+\frac{1}{2}}\cot\beta+\frac{(-\nu)(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}a^{-\nu-\frac{1}{2}}\\
&+\frac{(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu+1}\Gamma(-\nu+1)}a^{-\nu-\frac{1}{2}}\Big)-J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda})\Big(\frac{(\sqrt{\lambda})^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}a^{\nu+\frac{1}{2}}\cot\beta\\
&+\frac{\nu(\sqrt{\lambda})^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}a^{\nu-\frac{1}{2}}+\frac{(\sqrt{\lambda})^{\nu}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}a^{\nu-\frac{1}{2}}\Big)\Big]+\cot\beta\, O\left(a^{-\nu+\frac{5}{2}}\right)+O\left(a^{-\nu+\frac{3}{2}}\right)\\
=&\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2\sin\nu\pi}\Big(J'_{\nu}(\sqrt{\lambda})\frac{(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}\Big(a^{-\nu+\frac{1}{2}}\cot\beta+\Big(-\nu+\frac{1}{2}\Big)a^{-\nu-\frac{1}{2}}\Big)\\
&-J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda})\frac{(\sqrt{\lambda})^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}\Big(a^{\nu+\frac{1}{2}}\cot\beta+\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)a^{\nu-\frac{1}{2}}\Big)\Big)\\
&+O\left(a^{-\nu+\frac{5}{2}}|\cot\beta|\right)+O\left(a^{-\nu+\frac{3}{2}}\right),
\end{aligned}
$$

取 $c\in\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ 固定, 使得

$$
\frac{a^{-\nu+\frac{1}{2}}\cot\beta+(-\nu+\frac{1}{2})a^{-\nu-\frac{1}{2}}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}=c\frac{a^{\nu+\frac{1}{2}}\cot\beta+(\nu+\frac{1}{2})a^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)},
$$

那么由 c 不变, 当 a 变时,

$$
\cot\beta(a)=\frac{(-\nu+\frac{1}{2})2^{\nu}\Gamma(\nu+1)a^{-\nu-\frac{1}{2}}-c(\nu+\frac{1}{2})2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)a^{\nu-\frac{1}{2}}}{c2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)a^{\nu+\frac{1}{2}}-2^{\nu}\Gamma(\nu+1)a^{-\nu+\frac{1}{2}}}.
$$

由于 $\nu\neq\frac{1}{2}$, 在 $\cot\beta(a)$ 的表达式里, 上面的阶数是 $-\nu-\frac{1}{2}$, 下面的阶数是 $-\nu+\frac{1}{2}$, 故

$$
\cot\beta=O\left(\frac{1}{a}\right).
$$

所以

$$分子 = \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2\sin\nu\pi} \cdot \frac{c(\sqrt{\lambda})^{-\nu}J'_\nu(\sqrt{\lambda}) - (\sqrt{\lambda})^{\nu}J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda})}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$
$$\left(a^{\nu+\frac{1}{2}}\cot\beta + \left(\nu+\frac{1}{2}\right)a^{\nu-\frac{1}{2}}\right) + O\left(a^{-\nu+\frac{3}{2}}\right),$$

而

$$\theta(x,\lambda) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(J_\nu(\sqrt{\lambda})\frac{(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}x^{-\nu+\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.-J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})\frac{(\sqrt{\lambda})^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}x^{\nu+\frac{1}{2}}\right) + O\left(x^{-\nu+\frac{5}{2}}\right).$$

$$分母 = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda})(\sqrt{\lambda})^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}\left(a^{-\nu+\frac{1}{2}}\cot\beta + \left(-\nu+\frac{1}{2}\right)a^{-\nu+\frac{1}{2}}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})(\sqrt{\lambda})^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}\left(a^{\nu+\frac{1}{2}}\cot\beta + \left(\nu+\frac{1}{2}\right)a^{\nu-\frac{1}{2}}\right)\right]$$
$$+O\left(a^{-\nu+\frac{5}{2}}|\cot\beta|\right) + O\left(a^{-\nu+\frac{3}{2}}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[\frac{c(\sqrt{\lambda})^{-\nu}J_\nu(\sqrt{\lambda}) - (\sqrt{\lambda})^{\nu}J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}\left(a^{\nu+\frac{1}{2}}\cot\beta + \left(\nu+\frac{1}{2}\right)a^{\nu-\frac{1}{2}}\right)\right]$$
$$+O\left(a^{-\nu+\frac{3}{2}}\right).$$

由于 $0<\nu<1, -\nu+\dfrac{3}{2}>\dfrac{1}{2}$, 而 $\nu-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$, 所以当 $a\to 0$ 时,

$$\frac{O(a^{-\nu+\frac{3}{2}})}{O(a^{\nu-\frac{1}{2}})} \to 0.$$

这样便有

$$M(\lambda) = \lim_{a\to 0} m(\lambda,a,\beta) = -\frac{1}{2} - \sqrt{\lambda}\,\frac{c(\sqrt{\lambda})^{-\nu}J'_\nu(\sqrt{\lambda}) - (\sqrt{\lambda})^{\nu}J'_\nu(\sqrt{\lambda})}{c(\sqrt{\lambda})^{-\nu}J_\nu(\sqrt{\lambda}) - (\sqrt{\lambda})^{\nu}J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})}$$
$$= -\frac{1}{2} - \sqrt{\lambda}\,\frac{cJ'_\nu(\sqrt{\lambda}) - \lambda^{\nu}J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda})}{cJ_\nu(\sqrt{\lambda}) - \lambda^{\nu}J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})}.$$

注意到

$$J'_\nu(x) = \alpha_0 x^{\nu-1} + \alpha_1 x^{2+\nu-1} + \cdots = x^{\nu-1}(\alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \cdots),$$
$$J'_{-\nu}(x) = \beta_0 x^{-\nu-1} + \beta_1 x^{2-\nu-1} + \cdots = x^{-\nu-1}(\beta_0 + \beta_1 x^2 + \cdots),$$

便知 $M(\lambda)$ 是 $\sqrt{\lambda}$ 的偶函数, 因此是 λ 的单值函数, 当 $c\neq 0$ 和 ∞ 时, $M(\lambda)$ 的极点是 $cJ_\nu(\sqrt{\lambda}) - \lambda^{\nu}J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})$ 的零点, 记这些零点为 $\{\lambda_n\,|\,n=1,2,\cdots\}$, 它们就是 T 的特征值, 对应的特征函数是

$$\theta(x,\lambda_n) = \frac{\pi\sqrt{x}}{2\sin\nu\pi}J_\nu(\sqrt{\lambda_n})\left(J_{-\nu}(\sqrt{\lambda_n}x) - c\lambda_n^{-\nu}J_\nu(\sqrt{\lambda_n}x)\right),$$

$\left\{ \frac{\theta(\cdot,\lambda_n)}{\|\theta(\cdot,\lambda_n)\|} \,\middle|\, n=1,2,\cdots \right\}$ 组成了 $L^2(0,1]$ 的规范正交基.

当 $c=0$ 时, 特征值是 $J_{-\nu}(\sqrt{\lambda})$ 的零点, 特征函数是

$$\frac{\pi}{2\sin\nu\pi} J_\nu(\sqrt{\lambda_n})\sqrt{x}J_{-\nu}(\sqrt{\lambda_n}x), \quad n=1,2,\cdots,$$

特征展开是 $-\nu$ 阶 Bessel 函数展开. 当 $c=\infty$ 时, $M(\lambda)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\lambda}J'_\nu(\sqrt{\lambda})}{J_\nu(\sqrt{\lambda})}$, 特征展开就是 Fourier-Bessel 展开 (ν 阶 Bessel 函数展开).

(3) $\nu=0$ 情形.

与 $0<\nu<1$ 情形类似. 设

$$\begin{cases} M\theta=\lambda\theta, \\ \theta(1)=0, \\ \theta'(1)=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} M\varphi=\lambda\varphi, \\ \varphi(1)=1, \\ \varphi'(1)=0, \end{cases}$$

则

$$\theta(x,\lambda)=\frac{\pi}{2}\sqrt{x}\left(Y_0(\sqrt{\lambda})J_0(\sqrt{\lambda}x)-J_0(\sqrt{\lambda})Y_0(\sqrt{\lambda}x)\right),$$

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{1}{2}\theta(x,\lambda)+\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\sqrt{x}\left(Y'_0(\sqrt{\lambda})J_0(\sqrt{\lambda}x)-J'_0(\sqrt{\lambda})Y_0(\sqrt{\lambda}x)\right).$$

在 0 点附近,

$$Y_0(\sqrt{\lambda}x)=\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}x\right)+O(x^2|\ln x|), \quad \gamma=-\psi(1),$$

$$Y'_0(\sqrt{\lambda}x)=\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}x}+O(x|\ln x|),$$

故

$$\theta(x,\lambda)=\frac{\pi}{2}\left(Y_0(\sqrt{\lambda})\sqrt{x}-\frac{2}{\pi}J_0(\sqrt{\lambda})\sqrt{x}\left(\gamma+\ln\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}x\right)\right)+O\left(x^{\frac{5}{2}}|\ln x|\right),$$

$$\begin{aligned}\theta'(x,\lambda)=&\frac{\pi}{4\sqrt{x}}\left(Y_0(\sqrt{\lambda})-\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}x\right)J_0(\sqrt{\lambda})\right)\\&-\frac{1}{\sqrt{x}}J_0(\sqrt{\lambda})+O\left(x^{\frac{3}{2}}|\ln x|\right),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\cot\beta\,\theta(a,\lambda)+\theta'(a,\lambda)=&\frac{\pi}{2}\left[\left(Y_0(\sqrt{\lambda})-\frac{2}{\pi}J_0(\sqrt{\lambda})\ln\sqrt{\lambda}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\cot\beta+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\right)\right.\\&\left.-J_0(\sqrt{\lambda})\left(\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{a}{2}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\cot\beta+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\right)+\frac{2}{\pi}a^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\\&+O\left(a^{\frac{5}{2}}|\ln a||\cot\beta|\right)+O\left(a^{\frac{3}{2}}|\ln a|\right).\end{aligned}$$

而

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\sqrt{x}\left(Y_0'(\sqrt{\lambda})-\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}x\right)J_0'(\sqrt{\lambda})\right)$$
$$+O\left(x^{\frac{5}{2}}|\ln x|\right)+\frac{1}{2}\theta(x,\lambda),$$
$$\varphi'(x,\lambda)=\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{x}}\left(Y_0'(\sqrt{\lambda})-\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}x\right)J_0'(\sqrt{\lambda})\right)-\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{x}}J_0'(\sqrt{\lambda})$$
$$+\frac{1}{2}\theta'(x,\lambda)+O\left(x^{\frac{3}{2}}|\ln x|\right),$$

故

$$\cot\beta\,\varphi(a,\lambda)+\varphi'(a,\lambda)=\frac{1}{2}(\cot\beta\theta(a,\lambda)+\theta'(a,\lambda)$$
$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\left[\left(Y_0'(\sqrt{\lambda})-\frac{2}{\pi}\ln\sqrt{\lambda}\,J_0'(\sqrt{\lambda})\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\cot\beta+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\right)\right.$$
$$\left.-J_0'(\sqrt{\lambda})\left(\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{a}{2}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\cot\beta+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\right)+\frac{2}{\pi}a^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$
$$+O\left(a^{\frac{5}{2}}|\ln a||\cot\beta|\right)+O\left(a^{\frac{3}{2}}|\ln a|\right).$$

取 c 使得

$$\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{a}{2}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\cot\beta+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\right)+\frac{2}{\pi}a^{-\frac{1}{2}}=c\left(a^{\frac{1}{2}}\cot\beta+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\right),$$

则对固定的 c, 当 a 变时,

$$\cot\beta(a)=\frac{\frac{1}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{a}{2}\right)a^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{\pi}a^{-\frac{1}{2}}-\frac{c}{2}a^{-\frac{1}{2}}}{ca^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{a}{2}\right)a^{\frac{1}{2}}}=O\left(\frac{1}{a}\right),$$

那么

$$m(\lambda,a,\beta)=-\frac{\cot\beta\,\varphi(a,\lambda)+\varphi'(a,\lambda)}{\cot\beta\,\theta(a,\lambda)+\theta'(a,\lambda)}=-\frac{1}{2}-\sqrt{\lambda}\cdot$$
$$\frac{\left(-cJ_0'(\sqrt{\lambda})+Y_0'(\sqrt{\lambda})-\frac{2}{\pi}J_0'(\sqrt{\lambda})\ln\sqrt{\lambda}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\cot\beta+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\right)+O\left(a^{\frac{5}{2}}|\ln a||\cot\beta|\right)+O\left(a^{\frac{3}{2}}|\ln a|\right)}{\left(-cJ_0(\sqrt{\lambda})+Y_0(\sqrt{\lambda})-\frac{2}{\pi}J_0(\sqrt{\lambda})\ln\sqrt{\lambda}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\cot\beta+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\right)+O\left(a^{\frac{5}{2}}|\ln a||\cot\beta|\right)+O\left(a^{\frac{3}{2}}|\ln a|\right)}.$$

但是

$$a^{\frac{1}{2}}\cot\beta+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2}{\pi}}{ca^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{a}{2}\right)a^{\frac{1}{2}}},$$

因此

$$m(\lambda,a,\beta)=-\frac{1}{2}-\sqrt{\lambda}\,\frac{cJ_0'(\sqrt{\lambda})-Y_0'(\sqrt{\lambda})+\dfrac{2}{\pi}J_0'(\sqrt{\lambda})\ln\sqrt{\lambda}+O\left(a^2\ln^2 a\right)}{cJ_0(\sqrt{\lambda})-Y_0(\sqrt{\lambda})+\dfrac{2}{\pi}J_0(\sqrt{\lambda})\ln\sqrt{\lambda}+O\left(a^2\ln^2 a\right)},$$

故

$$M(\lambda)=-\frac{1}{2}-\sqrt{\lambda}\,\frac{cJ_0'(\sqrt{\lambda})-Y_0'(\sqrt{\lambda})+\dfrac{2}{\pi}J_0'(\sqrt{\lambda})\ln\sqrt{\lambda}}{cJ_0(\sqrt{\lambda})-Y_0(\sqrt{\lambda})+\dfrac{2}{\pi}J_0(\sqrt{\lambda})\ln\sqrt{\lambda}}.$$

同样地，它是 λ 的偶函数，$M(\lambda)$ 为半纯函数，其极点即 $cJ_0(\sqrt{\lambda})-Y_0(\sqrt{\lambda})+\dfrac{2}{\pi}J_0(\sqrt{\lambda})\ln\sqrt{\lambda}$ 的零点是算子 T 的纯点谱, 对应的特征函数乃是

$$\theta(x,\lambda_n)=\frac{\pi\sqrt{x}}{2}\left(Y_0(\sqrt{\lambda_n})J_0(\sqrt{\lambda_n}x)-J_0(\sqrt{\lambda_n})Y_0(\sqrt{\lambda_n}x)\right),\quad n=1,2,\cdots,$$

它们组成 $L^2(0,1]$ 的规范正交基.

4.4.3　[1,∞) 上 Bessel 微分算子的特征展开

$$M=-D^2+\frac{\nu^2-\dfrac{1}{4}}{x^2},\quad x\in[1,\infty),$$

∞ 是 M 的奇型端点.

1. $T_0(M)$ 的自伴延拓

引理 4.4.2　在无穷远附近, 存在正数 r 和实数 α, 使得

$$J_\nu(x)\approx\frac{r}{\sqrt{x}}\sin(x+\alpha).$$

证明　考虑 $\sqrt{x}J_\nu(x)$ 在无穷远处的渐近行为. 设 $y(x)=\sqrt{x}J_\nu(x)$, 则

$$y'(x)=\frac{\dfrac{1}{2}J_\nu(x)+xJ_\nu'(x)}{\sqrt{x}},\quad y''(x)=\frac{x^2J_\nu''(x)+xJ_\nu'(x)-\dfrac{1}{4}J_\nu(x)}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

由

$$x^2J_\nu''(x)+xJ_\nu'(x)+(x^2-\nu^2)J_\nu(x)=0$$

知

$$y''(x)+\left(1-\frac{\nu^2-\dfrac{1}{4}}{x^2}\right)y(x)=0.$$

$\forall x>0, y(x)\in\mathbf{R}, y(x)\not\equiv 0$, 所以

$$r(x)=\sqrt{y^2(x)+y'^2(x)}>0,\quad x>0.$$

于是

$$\begin{cases} y(x)=r(x)\sin\theta(x),\\ y'(x)=r(x)\cos\theta(x), \end{cases}$$

代入得

$$r'(x)\cos\theta(x)-\theta'(x)r(x)\sin\theta(x)+\left(1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)r(x)\sin\theta(x)=0.$$

而

$$r(x)\cos\theta(x)=r'(x)\sin\theta(x)+\theta'(x)r(x)\cos\theta(x),$$

那么

$$r'(x)=\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}r(x)\cos\theta(x)\sin\theta(x),$$

$$\theta'(x)=1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\sin^2\theta(x),$$

故

$$r(x)=r(x_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}\cos\theta(t)\sin\theta(t)\,\mathrm{d}t}>0.$$

因为

$$\int_{x_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}<\infty,$$

所以极限 $\lim\limits_{x\to\infty}r(x)=r>0$ 存在. 令 $\theta(x)=x+\alpha(x)$, 则

$$1+\alpha'(x)=1+\frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{x^2}\sin^2(x+\alpha(x)),$$

$$\alpha'(x)=\frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{x^2}\sin^2(x+\alpha(x)),$$

$$\alpha(x)-\alpha(x_0)=\int_{x_0}^{x}\frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{t^2}\sin^2(t+\alpha(t))\,\mathrm{d}t.$$

由此, 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=\alpha$ 也存在. 因为

$$\begin{aligned}|y(x)-r\sin(x+\alpha)|&=|r(x)\sin(x+\alpha(x))-r\sin(x+\alpha)|\\&\leqslant|r(x)-r|+r|\sin(x+\alpha(x))-\sin(x+\alpha)|\\&\leqslant|r(x)-r|+2r\left|\cos\left(x+\frac{\alpha(x)+\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha(x)-\alpha}{2}\right|\\&\leqslant|r(x)-r|+r|\alpha(x)-\alpha|,\end{aligned}$$

故

$$y(x)\approx r\sin(x+\alpha),\qquad x\to\infty,$$
$$J_\nu(x)\approx\frac{r}{\sqrt{x}}\sin(x+\alpha),\qquad x\to\infty.$$

$My=\lambda y$ 的基本解组是 $\{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x),\sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)\}$, 这样便有

$$\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x)\,\overline{\in}\,L^2[1,\infty),$$

所以 $T_0(M)$ 的亏指数是 $(1,1)$, 算子 $T=T_1(M)|_{\mathscr{D}(T)}$,

$$\mathscr{D}(T)=\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\mid f(1)=0\}$$

是 $T_0(M)$ 的一个自伴延拓.

2. $[1,\infty)$ 上的特征展开

引进第三类 Bessel 函数 ——Hankel 函数

$$H_\nu^{(1)}(t)=J_\nu(t)+\mathrm{i}Y_\nu(t)=\frac{J_{-\nu}(t)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}J_\nu(t)}{\mathrm{i}\sin\nu\pi},$$
$$H_\nu^{(2)}(t)=J_\nu(t)-\mathrm{i}Y_\nu(t)=\frac{J_{-\nu}(t)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}J_\nu(t)}{-\mathrm{i}\sin\nu\pi},$$

由 $H_\nu^{(1)}(t)$ 的渐近式 ([1]417 页),

$$H_\nu^{(1)}(t)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)_n\left(\frac{1}{2}-\nu\right)_n}{n!(\mathrm{i}2t)^n}\right],$$

$$(\lambda)_n\equiv\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1),$$

可得

$$\sqrt{x}H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sqrt{\lambda}x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)_n\left(\frac{1}{2}-\nu\right)_n}{n!(\mathrm{i}2\sqrt{\lambda}x)^n}\right],$$

而

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sqrt{\lambda}x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\right|=\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}x}.$$

当 $\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}>0$ 时, $\sqrt{x}H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}x)$ 是 $My=\lambda y$ 的唯一的平方可积解.

定理 4.4.3 设 $M=-D^2+q(x)$, $x\in[a,\infty)$, M 在奇型端点是极限点型的, y 是 $My=\lambda y$ 的平方可积非零解, 则 $M(\lambda)=\dfrac{y'(a,\lambda)}{y(a,\lambda)}$.

证明 属于 $L^2[a,\infty)$ 的线性无关解只有一个, 所以 y 是 Weyl 解的倍数,

$$y(x)=C\psi(x,\lambda)=C(\varphi(x,\lambda)+M(\lambda)\theta(x,\lambda)),$$

那么

$$y(a,\lambda)=C,$$
$$y'(a,\lambda)=CM(\lambda),$$

故

$$M(\lambda)=\frac{y'(a,\lambda)}{y(a,\lambda)}.$$

这样便得

$$M(\lambda)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\lambda}H_\nu^{(1)'}(\sqrt{\lambda})}{H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda})}.$$

当 $\lambda>0$ 时,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}M(\lambda)&=\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\,\frac{J_\nu'(\sqrt{\lambda})+\mathrm{i}Y_\nu'(\sqrt{\lambda})}{J_\nu(\sqrt{\lambda})+\mathrm{i}Y_\nu(\sqrt{\lambda})}\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{J_\nu^2(\sqrt{\lambda})+Y_\nu^2(\sqrt{\lambda})},\end{aligned}$$

当 $\lambda<0$ 时, $\sqrt{\lambda}=\mathrm{i}\mu$, 由

$$H_\nu^{(1)}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4})}W_{0,\nu}(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}t),$$

其中, Whittaker 函数 (参见文献 [1]338 页与 417 页)

$$W_{0,\nu}(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}t)=W_{0,\nu}(-\mathrm{i}2t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\frac{1}{2}+\nu}\left(1-\frac{s}{\mathrm{i}2t}\right)^{-\frac{1}{2}+\nu}\mathrm{d}s,$$

可得

$$\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda})=H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}\mu)&=\sqrt{\frac{2}{\pi\mathrm{i}\mu}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4})}\frac{\mathrm{e}^{-\mu}}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\nu\right)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\frac{1}{2}+\nu}\left(1+\frac{s}{2\mu}\right)^{-\frac{1}{2}+\nu}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\nu\pi}g(\mu),\end{aligned}$$

其中, $g(\mu)$ 是个实函数, 故

$$\frac{\sqrt{\lambda}H_\nu^{(1)'}(\sqrt{\lambda})}{H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda})}=\mu\frac{g'(\mu)}{g(\mu)},$$

$$\mathrm{Im}M(\lambda)=0.$$

这样便得

$$\mathrm{d}\rho(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{J_\nu^2(\sqrt{\lambda})+Y_\nu^2(\sqrt{\lambda})}, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda<0.\end{cases}$$

于是有特征展开

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x,\lambda)\left(\int_1^\infty f(t)\theta(t,\lambda)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\rho(\lambda)\\
&=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\pi\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda})Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)-Y_\nu(\sqrt{\lambda})J_\nu(\sqrt{\lambda}x)}{J_\nu^2(\sqrt{\lambda})+Y_\nu^2(\sqrt{\lambda})}\cdot\\
&\quad\left(\int_1^\infty f(t)\frac{\pi\sqrt{t}}{2}\left(J_\nu(\sqrt{\lambda})Y_\nu(\sqrt{\lambda}t)-Y_\nu(\sqrt{\lambda})J_\nu(\sqrt{\lambda}t)\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\lambda\\
&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\sqrt{x}\cdot\frac{(J_\nu(\sqrt{\lambda})Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)-Y_\nu(\sqrt{\lambda})J_\nu(\sqrt{\lambda}x))}{J_\nu^2(\sqrt{\lambda})+Y_\nu^2(\sqrt{\lambda})}\cdot\\
&\quad\left(\int_1^\infty f(t)\sqrt{t}\left(J_\nu(\sqrt{\lambda})Y_\nu(\sqrt{\lambda}t)-Y_\nu(\sqrt{\lambda})J_\nu(\sqrt{\lambda}t)\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\lambda,\\
&=\int_0^\infty\sqrt{x}\frac{\lambda(J_\nu(\lambda)Y_\nu(\lambda x)-Y_\nu(\lambda)J_\nu(\lambda x))}{J_\nu^2(\lambda)+Y_\nu^2(\lambda)}\\
&\quad\left(\int_1^\infty f(t)\sqrt{t}(J_\nu(\lambda)Y_\nu(\lambda t)-Y_\nu(\lambda)J_\nu(\lambda t)\mathrm{d}t)\right)\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

这就是所谓的 Weber 公式.

4.4.4　(0,∞) 上 Bessel 微分算子的特征展开

$$M=-D^2+\frac{\nu^2-\dfrac{1}{4}}{x^2},\quad x\in(0,\infty).$$

方程 $My=\lambda y$ 的基本解组是 $\{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x),\sqrt{x}Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)\}$, 取 $a\in(0,\infty)$, 设

$$\begin{cases}My_1=\lambda y_1,\\ y_1(a)=1,\\ y_1'(a)=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}My_2=\lambda y_2,\\ y_2(a)=0,\\ y_2'(a)=1,\end{cases}$$

则

$$y_2(x,\lambda)=\frac{\pi}{2}\sqrt{a}\sqrt{x}\left(J_\nu(\sqrt{\lambda}a)Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)-Y_\nu(\sqrt{\lambda}a)J_\nu(\sqrt{\lambda}x)\right),$$

$$y_1(x,\lambda)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda a}\sqrt{x}\left(Y_\nu'(\sqrt{\lambda}a)J_\nu(\sqrt{\lambda}x)-J_\nu'(\sqrt{\lambda}a)Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)\right)-\frac{1}{2a}y_2(x,\lambda),$$

0 和 ∞ 都是 M 的奇型端点, 当 $\nu\geqslant 1$ 时, $T_0(M)$ 在 $(0,a]$ 和 $[a,\infty)$ 上的亏指数都是 $(1,1)$, 所以 $T_0(M)$ 在 $(0,\infty)$ 的亏指数是 $(0,0)$, $T_0(M)$ 本身是自伴算子. 因为

$$\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x)\in L^2(0,a],$$

所以 Weyl 解

$$y_1(x,\lambda)+M_-(\lambda)y_2(x,\lambda)=C\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x).$$

让 $x=a$ 得

$$1=C\sqrt{a}J_\nu(\sqrt{\lambda}a),\quad C=\frac{1}{\sqrt{a}J_\nu(\sqrt{\lambda}a)},$$

$$y_1(x,\lambda)+M_-(\lambda)y_2(x,\lambda)=\frac{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{a}J_\nu(\sqrt{\lambda}a)},$$

$$y_1'(x,\lambda)+M_-(\lambda)y_2'(x,\lambda)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}J_\nu(\sqrt{\lambda}x)+\sqrt{\lambda}\sqrt{x}J_\nu'(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{a}J_\nu(\sqrt{\lambda}a)},$$

故

$$M_-(\lambda)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{a}}J_\nu(\sqrt{\lambda}a)+\sqrt{\lambda}\sqrt{a}J_\nu'(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{a}J_\nu(\sqrt{\lambda}a)}=\frac{1}{2a}+\frac{\sqrt{\lambda}J_\nu'(\sqrt{\lambda}a)}{J_\nu(\sqrt{\lambda}a)}.$$

因为 $\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}>0$ 时, $\sqrt{x}H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}x)\in L^2[a,\infty)$, 故

$$y_1(x,\lambda)+M_+(\lambda)y_2(x,\lambda)=C\sqrt{x}H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}x).$$

让 $x=a$ 得

$$C=\frac{1}{\sqrt{a}H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a)},$$

所以

$$y_1(x,\lambda)+M_+(\lambda)y_2(x,\lambda)=\frac{\sqrt{x}H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{a}H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a)}.$$

取导数, 再让 $x=a$, 便得

$$M_+(\lambda)=\frac{1}{2a}+\frac{\sqrt{\lambda}H_\nu^{(1)'}(\sqrt{\lambda}a)}{H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a)},$$

因此

$$\mathrm{Im}M_{11}(\lambda)=\mathrm{Im}\frac{1}{M_-(\lambda)-M_+(\lambda)}=\mathrm{Im}\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}a)H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda}\left(J_\nu'(\sqrt{\lambda}a)H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a)-J_\nu(\sqrt{\lambda}a)H_\nu^{(1)'}(\sqrt{\lambda}a)\right)},$$

而

$$\begin{vmatrix} J_\nu(\sqrt{\lambda}a) & H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a) \\ J_\nu'(\sqrt{\lambda}a) & H_\nu^{(1)'}(\sqrt{\lambda}a) \end{vmatrix} = \mathrm{i}\begin{vmatrix} J_\nu(\sqrt{\lambda}a) & Y_\nu(\sqrt{\lambda}a) \\ J_\nu'(\sqrt{\lambda}a) & Y_\nu'(\sqrt{\lambda}a) \end{vmatrix} = \mathrm{i}\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}a},$$

故

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}M_{11}(\lambda) &= -\mathrm{Im}\frac{\pi a}{2\mathrm{i}}\,J_\nu(\sqrt{\lambda}a)H_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}a)\\
&= -\mathrm{Im}\frac{\pi a}{2\mathrm{i}}\,J_\nu(\sqrt{\lambda}a)\frac{J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}a)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}J_\nu(\sqrt{\lambda}a)}{\nu\sin\nu\pi}\\
&= \frac{\pi a}{2\sin\nu\pi}\,\mathrm{Im}\left(J_\nu(\sqrt{\lambda}a)J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}a)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}J_\nu^2(\sqrt{\lambda}a)\right)\\
&= \begin{cases} \dfrac{\pi a}{2}J_\nu^2(\sqrt{\lambda}a), & \lambda>0,\\ 0, & \lambda<0. \end{cases}
\end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda)=\begin{cases} \dfrac{a}{2}\,J_\nu^2(\sqrt{\lambda}a)\,\mathrm{d}\lambda, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda<0. \end{cases}$$

定理 4.4.4　若 $\lim\limits_{\delta\to0}M_-(\varepsilon+\mathrm{i}\delta)=M_-(\varepsilon)$, 则

$$\mathrm{d}\rho_{12}(\lambda)=\mathrm{d}\rho_{21}(\lambda)=M_-(\lambda)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda),\quad \mathrm{d}\rho_{22}(\lambda).=M_-^2(\lambda)\,\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda).$$

证明

$$\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda)=\left(\frac{1}{\pi}\lim_{\mu\to0}\mathrm{Im}M_{11}(\lambda+\mathrm{i}\mu)\right)\mathrm{d}\lambda,$$

而

$$\begin{aligned}
\lim_{\mu\to0}\mathrm{Im}M_{11}(\lambda+\mathrm{i}\mu) &= \lim_{\mu\to0}\mathrm{Im}\frac{1}{M_-(\lambda+\mathrm{i}\mu)-M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)}\\
&= \mathrm{Im}\frac{1}{M_-(\lambda)-\lim\limits_{\mu\to0}M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)}\\
&= \frac{\mathrm{Im}\left(\lim\limits_{\mu\to0}M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)\right)}{\left(M_-(\lambda)-\left(\mathrm{Re}\lim\limits_{\mu\to0}M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\lim\limits_{\mu\to0}M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)\right)^2},
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{\mu\to 0}\mathrm{Im}M_{12}(\lambda+\mathrm{i}\mu)=\lim_{\mu\to 0}\frac{1}{2}\mathrm{Im}\frac{M_-(\lambda+\mathrm{i}\mu)+M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)}{M_-(\lambda+\mathrm{i}\mu)-M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\frac{M_-(\lambda)+\lim\limits_{\mu\to 0}M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)}{M_-(\lambda)-\lim\limits_{\mu\to 0}M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\frac{\left(M_-(\lambda)+\mathrm{Re}\left(\lim\limits_{\mu\to 0}M_+\right)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\lim\limits_{\mu\to 0}M_+\right)\right)\left(M_-(\lambda)-\mathrm{Re}\left(\lim\limits_{\mu\to 0}M_+\right)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\lim\limits_{\mu\to 0}M_+\right)\right)}{\left(M_-(\lambda)-\mathrm{Re}\left(\lim\limits_{\mu\to 0}M_+\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\left(\lim\limits_{\mu\to 0}M_+\right)\right)^2}$$

$$=\frac{M_-(\lambda)\cdot\mathrm{Im}\left(\lim\limits_{\mu\to 0}M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)\right)}{\left(M_-(\lambda)-\mathrm{Re}\left(\lim\limits_{\mu\to 0}M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\left(\lim\limits_{\mu\to 0}M_+(\lambda+\mathrm{i}\mu)\right)\right)^2}$$

$$=M_-(\lambda)\lim_{\mu\to 0}\mathrm{Im}M_{11}(\lambda+\mathrm{i}\mu),$$

故

$$\mathrm{d}\rho_{12}(\lambda)=\mathrm{d}\rho_{21}(\lambda)=M_-(\lambda)\,\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda).$$

类似地, 可得

$$\mathrm{d}\rho_{22}(\lambda)=M_-^2(\lambda)\,\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda).$$

对我们的问题来说,

$$\lim_{\mu\to 0}M_-(\lambda+\mathrm{i}\mu)=\lim_{\mu\to 0}\left(\frac{1}{2a}+\frac{\sqrt{\lambda+\mathrm{i}\mu}\,J_\nu'(\sqrt{\lambda+\mathrm{i}\mu}\,a)}{J_\nu(\sqrt{\lambda+\mathrm{i}\mu}\,a)}\right)$$
$$=\frac{1}{2a}+\frac{\sqrt{\lambda}\,J_\nu'(\sqrt{\lambda}\,a)}{J_\nu(\sqrt{\lambda}\,a)},$$

所以由定理 4.4.4 便得

$$\begin{aligned}f(x)=&\int_{-\infty}^{\infty}y_1(x,\lambda)\left(\int_0^\infty f(t)y_1(t,\lambda)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda)\\&+y_1(x,\lambda)\left(\int_0^\infty f(t)y_2(t,\lambda)\,\mathrm{d}t\right)M_-(\lambda)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda)\\&+y_2(x,\lambda)\left(\int_0^\infty f(t)y_1(t,\lambda)\,\mathrm{d}t\right)M_-(\lambda)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda)\\&+y_2(x,\lambda)\left(\int_0^\infty f(t)y_2(t,\lambda)\,\mathrm{d}t\right)M_-^2(\lambda)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda)\\=&\int_{-\infty}^{\infty}y_1(x,\lambda)\left(\int_0^\infty f(t)\left(y_1(t,\lambda)+M_-(\lambda)y_2(t,\lambda)\right)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda)\\&+M_-(\lambda)y_2(x,\lambda)\left(\int_0^\infty f(t)\left(y_1(t,\lambda)+M_-(\lambda)y_2(t,\lambda)\right)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} (y_1(x,\lambda)+M_-(\lambda)y_2(x,\lambda)) \left(\int_0^{\infty} f(t)(y_1(x,\lambda)+M_-(\lambda)y_2(x,\lambda))\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\rho_{11}(\lambda) \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{a}J\nu(\sqrt{\lambda}a)} \left(\int_0^{\infty} f(t)\frac{\sqrt{t}J_\nu(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{a}J_\nu(\sqrt{\lambda}a)}\,\mathrm{d}t \right) \frac{a}{2} J_\nu^2(\sqrt{\lambda}a)\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \sqrt{x}J_\nu(\sqrt{\lambda}x) \left(\int_0^{\infty} f(t)\sqrt{t}J_\nu(\sqrt{\lambda}t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^{\infty} \lambda\sqrt{x}J_\nu(\lambda x) \left(\int_0^{\infty} f(t)\sqrt{t}J_\nu(\lambda t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}
$$

这就是 $(0,\infty)$ 上的特征展开 —— Hankel 公式.

类似的方法可以考虑 $0 \leqslant \nu < 1$ 情形.

4.5 Hermite 微分算式

$$M = -D^2 + x^2, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$\pm\infty$ 是 M 的两个奇型端点, 因为 $q(x) = x^2$ 下有界, M 在这两个奇型端点处都是极限点型的, 由 Kodaira 公式, $T_0(M)$ 的亏指数是 $(0,0)$, 这说明 $T_0(M)$ 本身是自伴算子.

4.5.1 Weyl 函数的计算

定理 4.5.1 设 $M = -D^2 + q(x), \quad x \in (-\infty, \infty)$, 如果 $q(x)$ 是偶函数, 则

$$M_+(\lambda) = -M_-(\lambda).$$

证明 如果 $y(x)$ 是 $My = \lambda y$ 的解, 则 $y(-x)$ 也是解. 若

$$\begin{cases} My_1 = \lambda y_1, \\ y_1(0) = 1, \\ y_1'(0) = 0, \end{cases}$$

则 $h(x) = y_1(-x)$ 也满足它, 所以 $y_1(x) = y_1(-x)$, y_1 是偶函数. 同理, 若

$$\begin{cases} My_2 = \lambda y_2, \\ y_2(0) = 0, \\ y_2'(0) = 1, \end{cases}$$

则 $k(x) = -y_2(-x)$ 也是此 Cauchy 问题的解, 故 $y_2(x) = -y_2(-x)$, y_2 是奇函数. 这样便可以取特殊的 a, b, β, γ,

$$a = -b, \quad \beta = -\gamma.$$

于是

$$\begin{aligned} m_{-b}(\lambda) &= -\frac{\cot\beta y_1(-b,\lambda)+y_1'(-b,\lambda)}{\cot\beta y_2(-b,\lambda)+y_2'(-b,\lambda)} = \frac{\cot\gamma y_1(b,\lambda)+y_1'(b,\lambda)}{\cot\gamma y_2(b,\lambda)+y_2'(b,\lambda)} \\ &= -m_b(\lambda), \end{aligned}$$

因此

$$M_+(\lambda) = -M_-(\lambda).$$

由于 Hermite 微分算式的 $q(x)=x^2$ 是偶函数, $M_-(\lambda)=-M_+(\lambda)$, 只需计算 $M_+(\lambda)$ 即可. 因为 M 在 ∞ 处是极限点型的, 所以

$$M_+(\lambda) = \frac{y'(0)}{y(0)},$$

这里 y 是方程 $My=\lambda y$ 的平方可积非零解. 对方程 $My=\lambda y$ 作变换

$$z = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} y,$$

则

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} z, \\ y' &= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} z' - x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} z, \\ y'' &= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} z'' - 2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} z' - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} z + x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} z, \end{aligned}$$

代入方程得

$$z'' - 2xz' + (\lambda-1)z = 0.$$

下面考虑围道积分

$$z(x) = \int_C \mathrm{e}^{-x\zeta-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中, 曲线 C 如图 4.1 所示.

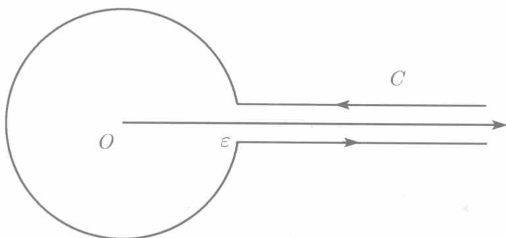


图 4.1

$$\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{(-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2})\ln\zeta}.$$

取 $\ln\zeta$ 的一个分支, 使得它在右半轴上为实值, 由于 $\mathrm{e}^{-x\zeta-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}$ 在 C 包含的区域内解析

$$z''(x) - 2xz'(x) + (\lambda - 1)z(x) = \int_C e^{-x\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}(\zeta^2 + 2x\zeta + (\lambda - 1))\,d\zeta,$$

可是

$$\frac{d}{d\zeta}\left(e^{-x\zeta-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}e^{-x\zeta-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}(\zeta^2 + 2x\zeta + (\lambda - 1)),$$

故

$$z'' - 2xz + (\lambda - 1)z = \int_C -2\frac{d}{d\zeta}\left(e^{-x\zeta-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\right)d\zeta = 0,$$

于是

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\int_C e^{-x\zeta-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\,d\zeta,$$

而

$$\frac{|y(x)|}{e^{-\frac{x^2}{2}+x}} = \left|\frac{1}{e^x}\int_C e^{-x\zeta-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\,d\zeta\right| = \left|\int_C e^{-x(\zeta+1)-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\,d\zeta\right|.$$

当 $x \to \infty$ 时,

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-x(t+1)-\frac{1}{4}t^2}t^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\,dt < \infty,$$

$$\int_0^{2\pi}\varepsilon^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}e^{-x\varepsilon\cos\varphi - x - \frac{1}{4}\varepsilon^2\cos 2\varphi}\varepsilon\,d\varphi < \infty,$$

所以

$$|y(x)| = O\left(e^{-\frac{x^2}{2}+x}\right), \quad x \to \infty,$$

因而

$$y \in L^2[0, \infty),$$

故

$$M_+(\lambda) = \frac{y'(0,\lambda)}{y(0,\lambda)} = -\frac{\displaystyle\int_C e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}}\,d\zeta}{\displaystyle\int_C e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\,d\zeta}.$$

ζ 绕 0 转一圈,

$$\zeta^{-\frac{\lambda}{2}\pm\frac{1}{2}} \to (e^{i2\pi})^{-\frac{\lambda}{2}\pm\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}\pm\frac{1}{2}}.$$

让 $\varepsilon \to 0$ 即得

$$M_+(\lambda) = \frac{-\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}}\,d\zeta + \int_0^\infty e^{i2\pi(-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})}e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}}\,d\zeta}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\,d\zeta - \int_0^\infty e^{i2\pi(-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2})}e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\,d\zeta}$$

$$= -\frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}}\left(e^{i2\pi(-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})} - 1\right)d\zeta}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}\zeta^2}\zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\left(e^{i2\pi(-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2})} - 1\right)d\zeta}$$

$$= -\frac{\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}}\, d\zeta}{\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\, d\zeta}.$$

可是

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\lambda-1}\, dt \overset{t=\frac{1}{4}\zeta^2}{=} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \left(\frac{\zeta^2}{4}\right)^{\lambda-1} \frac{1}{2}\zeta\, d\zeta \\ &= \frac{2}{4^{\lambda}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{2\lambda-1}\, d\zeta,\end{aligned}$$

于是

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{2}{4^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}\, d\zeta,$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{2}{4^{\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\zeta^2} \zeta^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}}\, d\zeta,$$

故

$$M_+(\lambda) = -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}, \quad M_-(\lambda) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)},$$

那么

$$\begin{aligned} M_{11}(\lambda) &= \frac{1}{M_-(\lambda)-M_+(\lambda)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}, \\ M_{12}(\lambda) &= M_{21}(\lambda) = 0, \\ M_{22}(\lambda) &= \frac{M_-(\lambda)M_+(\lambda)}{M_-(\lambda)-M_+(\lambda)} = -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)}. \end{aligned}$$

$\Gamma(\lambda)$ 没有零点, 它的简单极点是 $0, -1, -2, \cdots$, 所以 $M_{11}(\lambda)$ 有简单极点

$$\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4} = 0, -1, -2, \cdots,$$

$$\lambda = 4n+1, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

而 $M_{22}(\lambda)$ 有简单极点

$$\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4} = 0, -1, -2, \cdots,$$

$$\lambda = 4n+3, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

这表示 $\sigma(T_0(M)) = \sigma_p(T_0(M)) = \{2n+1 \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$, 而特征展开为

$$
\begin{aligned}
f(x) = & \int_{-\infty}^{\infty} y_1(x,\lambda)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)y_1(t,\lambda)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\rho_{11}(\lambda) \\
& + y_2(x,\lambda)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)y_2(t,\lambda)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\rho_{22}(\lambda) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n y_1(x,4n+1)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)y_1(t,4n+1)\,\mathrm{d}t \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_2(x,4n+3)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)y_2(t,4n+3)\,\mathrm{d}t, \quad f \in L^2(-\infty,\infty).
\end{aligned}
$$

4.5.2 Hermite 展开

为了将展开式具体化, 需要求对应于特征值的特征函数. 由于 $x=0$ 是方程

$$
z'' - 2xz' + (\lambda - 1)z = 0
$$

的正常点, 故按 Fuchs 理论, 它有形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的解. 代入方程得

$$
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + (\lambda-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,
$$

故

$$
\begin{aligned}
& 2a_2 + (\lambda-1)a_0 = 0, \\
& (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + (\lambda-1)a_n = 0, \quad n = 1,2,\cdots,
\end{aligned}
$$

即

$$
a_{n+2} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0,1,2,\cdots.
$$

当 $\lambda = 2n+1,\ n = 0,1,2,\cdots$ 时, $z(x)$ 是一个 n 阶多项式, 于是得

$$
y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} z(x),
$$

它是平方可积的, 是对应于 $\lambda = 2n+1$ 的特征函数, 记之为

$$
\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),
$$

通常称作 Hermite 函数, 不难算得

$$
\begin{aligned}
& H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \\
& H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.
\end{aligned}
$$

于是展开式变成

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad f \in L^2(-\infty,\infty),
$$

C_n 与 f 无关. 为确定起见, 取 $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)$ 可得

$$C_m \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} H_m(t)\right|^2 \mathrm{d}t = 1,$$

故

$$C_m = \frac{1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} H_m(t)\right|^2 \mathrm{d}t}.$$

由于

$$H_m'' - 2xH_m' + 2mH_m = 0,$$

$$\mathrm{e}^{-x^2} H_m'' - 2x\mathrm{e}^{-x^2} H_m' + 2m\mathrm{e}^{-x^2} H_m = 0,$$

即

$$-(\mathrm{e}^{-x^2} H_m')' = 2m\mathrm{e}^{-x^2} H_m,$$

另外考虑展开式

$$\psi(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(x)}{n!} t^n,$$

由

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2t\psi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (-2t+2x)\psi,$$

从展开式可得

$$C_n'(x) = 2nC_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

和

$$C_{n+1}(x) - 2xC_n(x) + 2nC_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

即

$$C_{n+1} - 2xC_n + C_n' = 0,$$

于是

$$C_{n+1}' - 2C_n - 2xC_n' + C_n'' = 0,$$

$$C_n'' - 2xC_n' + 2nC_n = 0,$$

这表明 $C_n = H_n$, 因而有递推公式

$$H_m' = 2mH_{m-1},$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}H_m(t)\right|^2\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}H_m^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}-\left(\mathrm{e}^{-t^2}H_m'(t)\right)'H_m(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}H_m'^{\,2}(t)\,\mathrm{d}t=2m\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}H_{m-1}^2(t)\,\mathrm{d}t\\&=\cdots=2^m m!\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}H_0^2(t)\,\mathrm{d}t=2^m m!\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x),\quad f\in L^2(-\infty,\infty).$$

而$\left\{\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)\,\middle|\,n=0,1,2,\cdots\right\}$ 是 $L^2(-\infty,\infty)$ 的规范正交基. 这就是所谓的 Hermite 展开.

4.6　Laguerre 微分算式

$$M=-D^2+\frac{x^2}{16}-\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2},\quad x\in[0,\infty).$$

表面上看, 0 和 ∞ 都是奇型端点.

4.6.1　$T_0(M)$ 的亏指数

令 $t=\frac{x^2}{4}$, $y(t)=x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{8}}u(x)$, 则

$$\begin{aligned}u'(x)&=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}y-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}y+\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}\dot{y},\\u''(x)&=\frac{1}{4}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}\ddot{y}+x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}\dot{y}-\frac{1}{4}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}\dot{y}-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}y\\&\quad-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}y+\frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}y.\end{aligned}$$

$Mu=\lambda u$ 变成

$$-\frac{1}{4}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}\ddot{y}-x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}\dot{y}+\frac{1}{4}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}\dot{y}=\lambda x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}y,$$

即

$$t\ddot{y}+(1-t)\dot{y}+\lambda y=0,\quad t\in[0,\infty).$$

这便是常说的 Laguerre 方程.

按照 Fuchs 理论, $t=0$ 是正则奇点, 指标方程是

$$\rho(\rho-1)+\rho=0,\ \text{即}\ \rho^2=0,$$

所以一个解是

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n,$$

代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_{n+1}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^n+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0,$$

比较系数得

$$a_{n+1}=\frac{n-\lambda}{(n+1)^2}a_n,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

所以

$$a_n=\frac{(-\lambda)(-\lambda+1)\cdots(-\lambda+n-1)}{n!^2}a_0,\quad n=1,2,\cdots.$$

根据系数的递推关系, 当 n 充分大时, a_n 同号, 不妨假定都是正的, 则当 $n\geqslant N$ 时,

$$a_{n+1}>\frac{c}{n+1}a_n,\quad c>\frac{1}{2},$$

那么

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{\infty}a_kt^k&>a_Nt^N+\frac{c}{N+1}a_Nt^{N+1}+\frac{c^2}{(N+1)(N+2)}a_Nt^{N+2}+\cdots\\&=a_NN!c^{-N}\left(\frac{(ct)^N}{N!}+\frac{(ct)^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right),\end{aligned}$$

这表示

$$\begin{aligned}y_1&=O\left(\mathrm{e}^{ct}\right),\\u_1(x)&=x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}y_1\left(\frac{x^2}{4}\right)=O\left(\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{cx^2}{4}-\frac{x^2}{8}}\right),\end{aligned}$$

所以当 x 充分大时, $u_1(x)>1$, 因此

$$u_1\in L^2(0,\ ),\ \text{但}\ u_1\overline{\in}L^2(\ ,\infty).$$

考虑方程的与 u_1 线性无关的解, 由 Fuchs 理论知与 y_1 线性无关的另一解为

$$y_2 = y_1 \int^t z(s)\mathrm{d}s,$$

$$\dot{y_2} = \dot{y_1} \int^t z(s)\mathrm{d}s + y_1 z,$$

$$\ddot{y_2} = \ddot{y_1} \int^t z(s)\mathrm{d}s + 2\dot{y_1} z + y_1 \dot{z},$$

代入方程得

$$t y_1 \dot{z} + (1-t) y_1 z + 2t \dot{y_1} z = 0,$$

$$\dot{z} + \left(\frac{1-t}{t} + \frac{2\dot{y_1}}{y_1}\right) z = 0,$$

解得

$$z = \frac{1}{t}\mathrm{e}^t \frac{1}{y_1^2(t)},$$

故

$$y_2 = y_1(t) \int^t \frac{\mathrm{e}^s}{s y_1^2(s)}\mathrm{d}s.$$

由于

$$\frac{\mathrm{e}^t}{t y_1^2(t)} \sim \frac{1}{t}, \quad t \to 0,$$

故

$$y_2(t) \sim \ln t, \quad t \to 0,$$

$$u_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}} y_2\left(\frac{x^2}{4}\right) \sim x^{\frac{1}{2}} \ln x, \quad x \to 0,$$

$u_2 \in L^2(0,\ )$, 由此可知 0 点为极限圆型, 其实 0 是个正常的点, 而 ∞ 处为极限点型. 所以 $T_0(M)$ 的亏指数是 $(1,1)$, 它的自伴延拓的定义域由 $\mathscr{D}(T_1(M))$ 中满足一个在 ∞ 处的边界条件界定.

4.6.2 $T_0(M)$ 的自伴延拓 T 有纯点谱

引理 4.6.1 设 $M = -D^2 + q(x)$, $x \in [0, \infty)$, 其中, $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = +\infty$, 则对任何 λ, 方程 $My = \lambda y$ 的非零解 $y(x,\lambda)$ 都只有有限个零点.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = +\infty$, 所以对任何 λ, 有 x_λ 使得

$$\lambda - q(x) < 0, \quad x \in [x_\lambda, \infty).$$

于是由 Sturm 比较定理, $y(x,\lambda)$ 在 $[x_\lambda, \infty)$ 上至多只有一个零点. 可是由解的存在唯一定理, 非零解 $y(x,\lambda)$ 在 $[0, x_\lambda)$ 上也只有有限个零点, 故得.

定理 4.6.1 设 $M=-D^2+q(x),\ x\in[0,\infty)$, 其中, $\lim\limits_{x\to\infty}q(x)=+\infty$, 则 $T_0(M)$ 的任何自伴延拓 T 都有纯点谱.

证明 $\forall b>0$, 在 $[0,b]$ 上考虑自伴算子

$$
\begin{aligned}
&T_b=T_1(M)|_{\mathscr{D}(T_b)},\\
&\mathscr{D}(T_b)=\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))\,|\,\sin\alpha f(0)-\cos\alpha f'(0)=0,\cos\beta f(b)-\sin\beta f'(b)=0\}.
\end{aligned}
$$

给定有限区间 $\varDelta$, 设 T_b 在 $\varDelta$ 里的特征值个数为 $N_b(\varDelta)$, 如果集合

$$\{N_b(\varDelta)\,|\,b>0\}\ \text{无界},$$

由于 $\sigma(T_b)=\sigma_p(T_b)=\{\lambda_n^{(b)}\,|\,n=1,2,\cdots\}$, 按 Sturm 振动定理, 对应于 $\lambda_n^{(b)}$ 的特征函数 $y_n^{(b)}(x,\lambda_n^{(b)})$ 恰有 n 个零点, 于是会有这样的 λ, λ 在 $\varDelta$ 的右边, 使得 $My=\lambda y$ 的解 $y(x,\lambda)$ 的零点有无穷多个, 矛盾! 所以必有常数 $C_\varDelta$, 使得

$$N_b(\varDelta)\leqslant C_\vartriangle,\quad b>0.$$

设 $\rho_b(\lambda)$ 是对应于 T_b 的谱函数, 它的跃点是 $\lambda_n^{(b)}$, 所以 $\rho_b(\lambda)$ 在 $\varDelta$ 里的跃点个数 $\leqslant C_\varDelta$, 故 $\rho(\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{b_n}(\lambda)$ 在 $\varDelta$ 上也只有有限个增加点, 这表示 T 有纯点谱.

4.6.3 $T_0(M)$ 的自伴延拓 T 的特征值与特征函数

由 4.6.1 小节中 $y_1(t)$ 系数的递推关系, 如果 $\lambda=n,\ n=0,1,2,\cdots$, 则 $y_1(t)$ 是一个 n 阶多项式. 因为

$$
\begin{aligned}
a_n&=\frac{(-n+n-1)(-n+n-2)\cdots(-n+1)(-n)}{n!^2}a_0=\frac{(-1)^n}{n!}a_0,\\
a_{n-1}&=\frac{n^2}{n-1-n}a_n=(-1)^{n-1}\binom{n}{1}\frac{1}{(n-1)!}a_0,\\
a_{n-2}&=\frac{(n-1)^2}{n-2-n}a_{n-1}=(-1)^{n-2}\binom{n}{2}\frac{1}{(n-2)!}a_0,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

所以

$$y_1(t)=\frac{(-1)^n}{n!}t^n+\binom{n}{1}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}+\binom{n}{2}\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}t^{n-2}+\cdots+1.$$

由于

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^t(t^n\mathrm{e}^{-t})^{(n)}&=\mathrm{e}^t\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}n(n-1)\cdots(n-k+1)t^{n-k}\mathrm{e}^{-t}\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}n(n-1)\cdots(n-k+1)t^{n-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{(n(n-1)\cdots(n-k+1))^2}{k!} t^{n-k} \\
&= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \frac{n^2}{1!} t^{n-1} + (-1)^{n-2} \frac{n^2(n-1)^2}{2!} t^{n-2} + \cdots + n! \\
&= n! \left(\frac{(-1)^n}{n!} t^n + \binom{n}{1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} + \binom{n}{2} \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} t^{n-2} + \cdots + 1 \right),
\end{aligned}
$$

记

$$
L_n(t) = \frac{1}{n!} \mathrm{e}^t (t^n \mathrm{e}^{-t})^{(n)},
$$

称其为 Laguerre 多项式, 不难算得

$$
L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = -t + 1, \quad L_2(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 2),
$$

$$
L_3(t) = \frac{1}{6}(-t^3 + 9t^2 - 18t + 6), \quad L_4(t) = \frac{1}{24}(t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24),
$$

因为 $n > k$ 时,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} L_n(t) \, \mathrm{d}t &= \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} (t^k \mathrm{e}^{-t}) \mathrm{e}^t (t^n \mathrm{e}^{-t})^{(n)} \, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{k}{n!} \int_0^{\infty} t^{k-1} (t^n \mathrm{e}^{-t})^{(n-1)} \, \mathrm{d}t \\
&= \cdots = \frac{(-1)^k k!}{n!} \int_0^{\infty} (t^n \mathrm{e}^{-t})^{(n-k)} \, \mathrm{d}t = 0,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} L_n^2(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!^2} (t^n \mathrm{e}^{-t})^{(n)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = 1,
$$

于是

$$
\left\{ \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} L_n(t) \,\middle|\, n = 0, 1, 2, \cdots \right\}, \quad \text{即} \quad \left\{ \sqrt{\frac{x}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}} L_n\left(\frac{x^2}{4}\right) \,\middle|\, n = 0, 1, 2, \cdots \right\}
$$

是 $L^2[0, \infty)$ 的规范正交基. 特征展开是

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \sqrt{\frac{t}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8}} L_n\left(\frac{t^2}{4}\right) \mathrm{d}t \right) \sqrt{\frac{x}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}} L_n\left(\frac{x^2}{4}\right), \quad f \in L^2[0, \infty).
$$

第 5 章　奇型任意阶情形自伴微分算子的谱论

现在考虑任意阶的对称微分算式

$$M = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k, \quad x \in (a,b)$$

在 $L^2(a,b)$ 生成的最小算子 $T_0(M)$ 的自伴延拓的谱分解. 这里 $p_k(x)$ 是复值函数 $p_k \in C^k(a,b)$ 且 $p_n(x) \neq 0, x \in (a,b)$.

5.1　展开式定理与 Parseval 等式

仍然考虑用有限区间去逼近区间 (a,b). 设 $\delta = [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \subset (a,b)$, T_δ 是 $T_0(M|_\delta)$ 的自伴延拓, 其定义域为

$$\mathscr{D}(T_\delta) = \{f \in \mathscr{D}(T_1(M|_\delta)) | U_\delta f = 0\},$$

这里 $U_\delta f = 0$ 表示刻画 $\mathscr{D}(T_\delta)$ 的边条件

$$U_{\delta j} f \equiv \sum_{k=1}^{n} \left(M_{\delta jk} f^{(k-1)}(\widetilde{a}) + N_{\delta jk} f^{(k-1)}(\widetilde{b}) \right) = 0, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

设 $\{\lambda_{\delta k} | k = 1,2,\cdots\}$ 是 T_δ 的谱集, 相应于 $\lambda_{\delta k}$ 的规范化特征函数是 $\varphi_{\delta k}, \{\varphi_{\delta k} | k = 1,2,\cdots\}$ 组成了 $L^2(\delta)$ 的规范正交基, 对任何的 $u \in L^2(\delta)$ 都有 Parseval 等式

$$\|u\|_\delta^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, \varphi_{\delta k})_\delta|^2,$$

$$\|u\|_\delta^2 = \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} |u(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

$$(u, \varphi_{\delta k})_\delta = \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} u(x) \overline{\varphi_{\delta k}(x)} \mathrm{d}x,$$

取 $c \in (\widetilde{a}, \widetilde{b})$, 设 $\chi_j(x,\lambda), j = 1,2,\cdots,n$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My = \lambda y, \\ y^{(k-1)}(c,\lambda) = \delta_{jk}, \quad k = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

的解, 它们是线性无关的, 所以

$$\varphi_{\delta k}=\sum_{j=1}^{n}r_{\delta kj}\chi_j(\cdot,\lambda_{\delta k}).$$

于是

$$\begin{aligned}\|u\|_\delta^2&=\sum_{k=1}^{\infty}|(u,\varphi_{\delta k})_\delta|^2\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{n}\overline{r_{\delta ks}}\int_\delta u(x)\overline{\chi_s(x,\lambda_{\delta k})}\mathrm{d}x\right)\overline{\left(\sum_{t=1}^{n}\overline{r_{\delta kt}}\int_\delta u(\tau)\overline{\chi_t(\tau,\lambda_{\delta k})}\mathrm{d}\tau\right)},\end{aligned}$$

令

$$g_{\delta j}(\lambda)=\int_\delta u(x)\overline{\chi_j(x,\lambda)}\mathrm{d}x,$$

则

$$\begin{aligned}\|u\|_\delta^2&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{n}\overline{r_{\delta ks}}g_{\delta s}(\lambda_{\delta k})\right)\overline{\left(\sum_{t=1}^{n}\overline{r_{\delta kt}}g_{\delta t}(\lambda_{\delta k})\right)}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}g_{\delta s}(\lambda_{\delta k})\overline{g_{\delta t}(\lambda_{\delta k})}\overline{r_{\delta ks}}\overline{\overline{r_{\delta kt}}}\\&=\sum_{s,t=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}g_{\delta s}(\lambda_{\delta k})\overline{g_{\delta t}(\lambda_{\delta k})}\overline{r_{\delta ks}}\overline{\overline{r_{\delta kt}}},\end{aligned}$$

在实轴上定义阶梯函数 $\rho_{\delta ts},\ s,t=1,\cdots,n$ 如下:

$$\rho_{\delta ts}(\lambda_{\delta k}+0)-\rho_{\delta ts}(\lambda_{\delta k}-0)=\sum_{\substack{\lambda_{\delta m}=\lambda_{\delta k}\\ \text{对 } m \text{ 求和}}}r_{\delta mt}\overline{r_{\delta ms}},$$

特征值 $\lambda_{\delta k}$ 是这些阶梯函数的间断点, 不妨假设 $\rho_{\delta ts}$ 是右连续的且 $\rho_{\delta ts}(0)=0$.

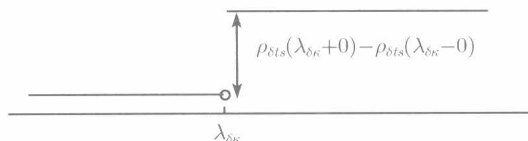


图 5.1

于是

$$\|u\|_\delta^2=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}g_{\delta s}(\lambda)\overline{g_{\delta t}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{\delta ts}(\lambda).$$

记 $\boldsymbol{\rho}_\delta=(\rho_{\delta ts}(\lambda))$, 这个矩阵有下列性质:

(1) $\boldsymbol{\rho}_\delta$ 是 Hermite 矩阵,

$$\overline{\rho_{\delta ts}(\lambda)}=\overline{\sum_{\lambda_{\delta m}\leqslant\lambda} r_{\delta mt}\overline{r_{\delta ms}}}=\sum_{\lambda_{\delta m}\leqslant\lambda} r_{\delta ms}\overline{r_{\delta mt}}=\rho_{\delta st}(\lambda);$$

(2) 如果 $\varDelta=(\lambda,\mu]$, 则 $\boldsymbol{\rho}_\delta(\varDelta)=\boldsymbol{\rho}_\delta(\mu)-\boldsymbol{\rho}_\delta(\lambda)$ 非负定,

$$\boldsymbol{\rho}_\delta(\varDelta)=(\rho_{\delta ts}(\varDelta)),\rho_{\delta ts}(\varDelta)=\sum_{\lambda<\lambda_{\delta m}\leqslant\mu} r_{\delta mt}\overline{r_{\delta ms}},$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\rho}_\delta(\varDelta)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})&=(\overline{x_1},\cdots,\overline{x_n})(\rho_{\delta ts}(\varDelta))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\\ &=\sum_{t,s=1}^{n}\rho_{\delta ts}(\varDelta)x_s\overline{x_t}\\ &=\sum_{\lambda<\lambda_{\delta m}\leqslant\mu}\left(\sum_{t,s=1}^{n} r_{\delta mt}\overline{r_{\delta ms}}x_s\overline{x_t}\right)\\ &=\sum_{\lambda<\lambda_{\delta m}\leqslant\mu}\left|\sum_{t=1}^{n} r_{\delta mt}\overline{x_t}\right|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

(3) 在 λ 的每个有限区间上, 特征值没有有限聚点, 故 $\rho_{\delta ts}(\lambda)$ 是有限的阶梯函数, 因而是有界变差的.

当 $\delta\to(a,b)$ 时, ρ_δ 是否有极限?

定理 5.1.1(Levitan, 1950) 设 (1)$\{\delta\}$ 是一串趋于 (a,b) 的闭子区间;

(2) $U_\delta f=0$ 是对应于自伴延拓 T_δ 的定义域的边界条件,

则从 $\{\delta\}$ 中可以取出一个子序列 $\{\delta_j\}$, 使得

$$j\to\infty,\delta_j\to(a,b),\quad \lim_{j\to\infty}\boldsymbol{\rho}_{\delta_j}(\lambda)=\boldsymbol{\rho}(\lambda).$$

矩阵 $\boldsymbol{\rho}(\lambda)$ 也具有上面提到的 $\boldsymbol{\rho}_\delta(\lambda)$ 具有的 3 条性质.

证明 (1) 对任何的 $\mu>0$, 存在与 δ 和 U_δ 无关的常数 $M(\mu)$, 使得对一切闭子区间 δ 和 $1\leqslant t,s\leqslant n$ 都有 $\displaystyle\int_{-\mu}^{\mu}|\mathrm{d}\rho_{\delta ts}(\lambda)|\leqslant M(\mu)$.

(i) 只要证明 $\displaystyle\int_{-\mu}^{\mu}\mathrm{d}\rho_{\delta tt}(\lambda)\leqslant M(\mu)$ 即可.

因为

$$2\left|\sum_{\lambda_{\delta m}=\lambda_{\delta l},\text{对 } m \text{ 求和}} r_{\delta mt}\overline{r_{\delta ms}}\right|\leqslant\sum_{\lambda_{\delta m}=\lambda_{\delta l}}\left(|r_{\delta mt}|^2+|r_{\delta ms}|^2\right),$$

所以

$$2\int_{-\mu}^{\mu}|\mathrm{d}\rho_{\delta ts}(\lambda)|=2\sum_{-\mu\leqslant\lambda_{\delta m}\leqslant\mu}|r_{\delta mt}\overline{r_{\delta ms}}|\leqslant\sum_{-\mu\leqslant\lambda_{\delta m}\leqslant\mu}(|r_{\delta mt}|^2+|r_{\delta ms}|^2)$$
$$=\int_{-\mu}^{\mu}\mathrm{d}\rho_{\delta tt}(\lambda)+\int_{-\mu}^{\mu}\mathrm{d}\rho_{\delta ss}(\lambda).$$

(ii) $\int_{-\mu}^{\mu}\mathrm{d}\rho_{\delta tt}(\lambda)\leqslant M(\mu)$.

$\chi_j^{(k-1)}(x,\lambda)$ 在 $|x-c|\leqslant\xi,|\lambda|\leqslant\mu$ 上连续, 而 $\chi_j^{(k-1)}(c,\lambda)=\delta_{jk}$. 对于每个 $\lambda_0\in[-\mu,\mu]$, 存在 h_{λ_0} 与 η_{λ_0}, 使得 $c\leqslant x\leqslant c+h_{\lambda_0}$, $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\eta_{\lambda_0}$ 时,

$$\left|\chi_j^{(k-1)}(x,\lambda)-\delta_{jk}\right|<\frac{1}{6n^2},$$

$\{(\lambda_0-\eta_{\lambda_0},\lambda_0+\eta_{\lambda_0})|\lambda_0\in[-\mu,\mu]\}$ 盖住了 $[-\mu,\mu]$, 利用有限覆盖定理, 可知存在 $h\geqslant 0$, 使得当 $c\leqslant x\leqslant c+h$ 时, 对一切 $\lambda\in[-\mu,\mu]$ 都有

$$\left|\chi_j^{(k-1)}(x,\lambda)-\delta_{jk}\right|<\frac{1}{6n^2}.$$

取 $\widetilde{f}(x)$ 非负, $\widetilde{f}\in C^\infty(a,b)$, $\mathrm{supp}\widetilde{f}\subset(c,c+h)$ 且 $\int_c^{c+h}\widetilde{f}(x)\mathrm{d}x=1$. 对函数 $(-1)^{m-1}\widetilde{f}^{(m-1)}(x)$ 用 Bessel 不等式得

$$\left\|(-1)^{m-1}\widetilde{f}^{(m-1)}\right\|_\delta^2\geqslant\sum_{l=1}^{k}\left|((-1)^{m-1}\widetilde{f}^{(m-1)},\varphi_{\delta l})_\delta\right|^2.$$

设右边只含有那些特征值在 $[-\mu,\mu]$ 内的特征函数, 于是改写得

$$\int_c^{c+h}\left|\widetilde{f}^{(m-1)}(x)\right|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\mu}^{\mu}\sum_{s,t=1}^{n}g_{\delta s}(\lambda)\overline{g_{\delta t}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{\delta ts}(\lambda),$$

其中,

$$g_{\delta s}(\lambda)=\int_c^{c+h}(-1)^{m-1}\widetilde{f}^{(m-1)}(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x$$
$$=\int_c^{c+h}\widetilde{f}(x)\overline{\chi_s^{(m-1)}(x,\lambda)}\mathrm{d}x,$$

于是对一切 $\lambda\in[-\mu,\mu]$,

$$|g_{\delta s}(\lambda)-\delta_{sm}|=\left|\int_c^{c+h}\widetilde{f}(x)\overline{\chi_s^{(m-1)}(x,\lambda)}\mathrm{d}x-\int_c^{c+h}\delta_{sm}\widetilde{f}(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\int_c^{c+h}\widetilde{f}(x)\left|\chi_s^{(m-1)}(x,\lambda)-\delta_{sm}\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{6n^2}.$$

这样

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\mu}^{\mu}\sum_{s,t=1}^{m} g_{\delta s}(\lambda)\overline{g_{\delta t}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{\delta ts}(\lambda)\\
\geqslant &\int_{-\mu}^{\mu}|g_{\delta m}(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\rho_{\delta mm}(\lambda)-\int_{-\mu}^{\mu}\sum_{s\text{ 或 }t\neq m}|g_{\delta s}(\lambda)|\,|g_{\delta t}(\lambda)|\,|\mathrm{d}\rho_{\delta ts}(\lambda)|\\
\geqslant &\left(1-\frac{1}{6n^2}\right)^2\int_{-\mu}^{\mu}\mathrm{d}\rho_{\delta mm}(\lambda)-\frac{1}{2}\int_{-\mu}^{\mu}\sum_{s\text{或}t\neq m}|g_{\delta s}(\lambda)|\,|g_{\delta t}(\lambda)|\,(\mathrm{d}\rho_{\delta ss}(\lambda)+\mathrm{d}\rho_{\delta tt}(\lambda))\\
\geqslant &\left(1-\frac{1}{6n^2}\right)^2\int_{-\mu}^{\mu}\mathrm{d}\rho_{\delta mm}(\lambda)-\int_{-\mu}^{\mu}\sum_{t\neq m}\sum_{s=1}^{n}|g_{\delta s}(\lambda)|\,|g_{\delta t}(\lambda)|\,\mathrm{d}\rho_{\delta ss}(\lambda)\\
\geqslant &\left(1-\frac{1}{6n^2}\right)^2\int_{-\mu}^{\mu}\mathrm{d}\rho_{\delta mm}(\lambda)-\frac{n-1}{6n^2}\int_{-\mu}^{\mu}\sum_{s=1}^{n}|g_{\delta s}(\lambda)|\,\mathrm{d}\rho_{\delta ss}(\lambda),\\
&\left(\text{因为 }|g_{\delta s}(\lambda)|\leqslant\frac{1}{6n^2}\right)\\
\geqslant &\left(1-\frac{1}{6n^2}\right)^2\int_{-\mu}^{\mu}\mathrm{d}\rho_{\delta mm}(\lambda)-\frac{n-1}{6n^2}\left(1+\frac{1}{6n^2}\right)\int_{-\mu}^{\mu}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{d}\rho_{\delta ss}(\lambda),
\end{aligned}
$$

由于 $n\geqslant 1$, $\frac{1}{6n^2}<\frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{6n^2}\left(1+\frac{1}{6n^2}\right)<\frac{n}{6n^2}\frac{3}{2}=\frac{1}{4n}$, 故

$$
\text{上式}\geqslant\frac{1}{2}\int_{-\mu}^{\mu}\mathrm{d}\rho_{\delta mm}(\lambda)-\frac{1}{4n}\int_{-\mu}^{\mu}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{d}\rho_{\delta ss}(\lambda),
$$

将对应于 $m=1,2,\cdots,n$ 的不等式加起来便得

$$
\frac{1}{2}\int_{-\mu}^{\mu}\sum_{m=1}^{n}\mathrm{d}\rho_{\delta mm}(\lambda)-\frac{1}{4}\int_{-\mu}^{\mu}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{d}\rho_{\delta ss}(\lambda)\leqslant\sum_{m=1}^{n}\int_{c}^{c+h}\left|\widetilde{f}^{(m-1)}(x)\right|^2\mathrm{d}x,
$$

即

$$
\int_{-\mu}^{\mu}\sum_{m=1}^{n}\mathrm{d}\rho_{\delta mm}(\lambda)\leqslant 4\sum_{m=1}^{n}\int_{c}^{c+h}\left|\widetilde{f}^{(m-1)}(x)\right|^2\mathrm{d}x=M(\mu),\ \ h\text{ 与 }\mu\text{ 是有关的!}
$$

(2) 根据 Helly 选择定理, 存在子序列 $\{\delta_j\}$, 使得

$$
j\to\infty,\ \delta_j\to(a,b),\quad \lim_{j\to\infty}\rho_{\delta_j}(\lambda)=\rho(\lambda).
$$

当然, 极限矩阵 $\boldsymbol{\rho}(\lambda)$ 也具有每个 $\boldsymbol{\rho}_\delta(\lambda)$ 所具有的那 3 条性质.

考虑空间 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$.

$$L^2_\rho(-\infty,\infty)=\left\{\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{pmatrix}\middle|g_s(\lambda)\text{ 是}\rho\text{ 可测函数且 }\|\boldsymbol{g}\|^2_\rho\right.$$
$$\left.=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}g_s(\lambda)\overline{g_t(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{ts}(\lambda)<\infty\right\}$$

(由于 $\boldsymbol{\rho}(\lambda)$ 具有的性质 (2), 这个积分定义了一个内积!).

定理 5.1.2 设 $\boldsymbol{\rho}$ 是定理 5.1.1 里确定的极限矩阵, 对任何 $f\in L^2(a,b)$, 存在 $\boldsymbol{g}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 使得若

$$g_{\delta_j s}(\lambda)=\int_{\delta_j}f(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x,\quad s=1,\cdots,n,$$

则

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\boldsymbol{g}_{\delta_j}-\boldsymbol{g}\right\|_\rho=0$$

且有 Parseval 等式

$$\|f\|=\|\boldsymbol{g}\|_\rho,$$

和展开式

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}\chi_s(x,\lambda)g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

等式在 $L^2(a,b)$ 收敛意义下成立, 这里 $g_t(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的分量, 把它记成 $\int_a^b f(x)\overline{\chi_t(x,\lambda)}\mathrm{d}x$.

证明 这个证明与定理 3.8.1 与定理 3.8.2 的证明类似.

(1) Parseval 等式.

(i) 设 $f\in C_0^\infty(a,b)$.

对于充分大的 j, $\mathrm{supp}f\subset\delta_j$. 于是

$$\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}g_{\delta_j s}(\lambda)\overline{g_{\delta_j t}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{\delta_j ts}(\lambda),$$

其中,

$$g_{\delta_j s}(\lambda)=\int_a^b f(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x(=g_s(\lambda))$$

(积分存在, 是 λ 的连续函数). 利用 δ_j 上的 Green 公式得

$$\int_a^b Mf(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\overline{M\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x=\overline{\lambda}\int_a^b f(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x=\overline{\lambda}g_{\delta_j s}(\lambda),$$

所以

$$\int_a^b |Mf(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \sum_{s,t=1}^{n} g_{\delta_j s}(\lambda)\overline{g_{\delta_j t}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{\delta_j ts}(\lambda).$$

于是, 由 $\rho_{\delta_j}(\lambda)$ 的性质 (2),

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty}\right)\sum_{s,t=1}^{n} g_{\delta_j s}(\lambda)\overline{g_{\delta_j t}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{\delta_j ts}(\lambda)\\ &\leqslant \frac{1}{A^2}\left[\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty}\right)|\lambda|^2\sum_{s,t=1}^{n} g_{\delta_j s}(\lambda)\overline{g_{\delta_j t}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{\delta_j ts}(\lambda)\right]\\ &\leqslant \frac{1}{A^2}\int_a^b |Mf(x)|^2 \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这说明积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n} g_{\delta_j s}(\lambda)\overline{g_{\delta_j t}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{\delta_j ts}(\lambda)$ 的收敛性关于 j 是一致成立的. 在不等式

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x - \int_{-A}^{A}\sum_{s,t=1}^{n} g_{\delta_j s}(\lambda)\overline{g_{\delta_j t}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{\delta_j ts}(\lambda)\right|\\ =&\left|\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty}\right)\sum_{s,t=1}^{n} g_{\delta_j s}(\lambda)\overline{g_{\delta_j t}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{\delta_j ts}(\lambda)\right|\\ \leqslant&\ \frac{1}{A^2}\int_a^b |Mf(x)|^2 \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

中让 $j \to \infty$, 利用 Helly 积分定理可得

$$\left|\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x - \int_{-A}^{A}\sum_{s,t=1}^{n} g_s(\lambda)\overline{g_t(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{ts}(\lambda)\right| \leqslant \frac{1}{A^2}\int_a^b |Mf(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

再让 $A \to \infty$ 便得

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n} g_s(\lambda)\overline{g_t(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{ts}(\lambda) = \|g\|_{\rho}^2.$$

(ii) 设 $f \in L^2(a,b)$, $\mathrm{supp}f$ 紧.

由 Friedrichs 软化定理, 存在 $\{f_m\} \subset C_0^{\infty}(a,b)$, 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}\|f_m - f\| = 0$, 那么

$$\begin{aligned}\|f_m - f_l\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}(g_s^{(m)}(\lambda) - g_s^{(l)}(\lambda))\overline{(g_t^{(m)}(\lambda) - g_t^{(l)}(\lambda))}\mathrm{d}\rho_{ts}(\lambda)\\ &= \left\|g^{(m)} - g^{(l)}\right\|_{\rho}^2,\end{aligned}$$

其中,

$$g_s^{(m)}(\lambda)=\int_a^b f_m(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x,\quad s=1,2,\cdots,n$$

(积分存在, 是 λ 的连续函数). 因为 $\{f_m\}$ 是基本列, $\{g^{(m)}\}$ 也是基本列, 由 $L_\rho^2(-\infty,\infty)$ 的完备性, 存在 $g\in L_\rho^2(-\infty,\infty)$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}\left\|g^{(m)}-g\right\|_\rho=0.$$

于是

$$\|f\|^2=\lim_{m\to\infty}\|f_m\|^2=\lim_{m\to\infty}\left\|g^{(m)}\right\|_\rho^2=\|g\|_\rho^2.$$

因为 f 只是在有限区间上不为零, $g_s^{(m)}(\lambda)$ 的积分仅在有限区间上进行, 在此区间上用 Schwarz 不等式, 注意到强收敛必弱收敛, 故得

$$\lim_{m\to\infty}g_s^{(m)}(\lambda)=\int_a^b f(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x,\quad s=1,2,\cdots,n,$$

再利用 Riesz 定理, 平均收敛可取到子列 p.p. 收敛, 故

$$g_s(\lambda)=\int_a^b f(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x,\quad s=1,2,\cdots,n.$$

(iii) 设 $f\in L^2(a,b)$.

令

$$f_\Delta(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\Delta,\\ 0, & x\in(a,b)\backslash\Delta,\end{cases}$$

则

$$g_s^{(\Delta)}(\lambda)=\int_a^b f_\Delta(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x=\int_\Delta f(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x,\quad s=1,2,\cdots,n.$$

由

$$\left\|\boldsymbol{g}^{(\Delta)}-\boldsymbol{g}^{(\Delta')}\right\|_\rho^2=\|f_\Delta-f_{\Delta'}\|^2$$

知 $\{\boldsymbol{g}^{(\Delta)}\}$ 是基本列, 存在 $\boldsymbol{g}\in L_\rho^2(-\infty,\infty)$, 使得

$$\lim_{\Delta\to(a,b)}\left\|\boldsymbol{g}^{(\Delta)}-\boldsymbol{g}\right\|_\rho=0,$$

于是

$$\|f\|^2=\lim_{\Delta\to(a,b)}\|f_\Delta\|^2=\lim_{\Delta\to(a,b)}\left\|\boldsymbol{g}^{(\Delta)}\right\|_\rho^2=\|\boldsymbol{g}\|_\rho^2.$$

而等式

$$g_s(\lambda)=\int_a^b f(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x,\quad s=1,2,\cdots,n$$

按 $L_\rho^2(-\infty,\infty)$ 收敛意义成立.

(2) 展开式 (特征展开)

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}\chi_s(x,\lambda)g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\sum_{s,t=1}^{n}\chi_s(x,\lambda)g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

等式在 $L^2(a,b)$ 收敛意义下成立.

由前面证明的 Parseval 等式, 利用极化恒等式

$$4f_1\overline{f_2}=|f_1+f_2|^2-|f_1-f_2|^2+\mathrm{i}(|f_1+if_2|^2-|f_1-if_2|^2)$$

可得广义 Parseval 等式

$$\int_a^b f_1(x)\overline{f_2(x)}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}g_s^{(1)}(\lambda)\overline{g_t^{(2)}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{ts}(\lambda),$$

其中,

$$g_s^{(i)}(\lambda)=\int_a^b f_i(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x,\quad i=1,2;s=1,2,\cdots,n$$

记

$$f_A(x)=\int_{-A}^{A}\sum_{s,t=1}^{n}\chi_s(x,\lambda)g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

由于积分在有限区间上进行, 这是一个 x 的连续函数. 设 $P\in L^2(a,b)$, $\mathrm{supp}P$ 紧, 按 (1), 与 P 对应的 $L_\rho^2(-\infty,\infty)$ 的元素记为 $\boldsymbol{Q}$. 因为 $\mathrm{supp}P$ 紧, 下述积分有意义:

$$\begin{aligned}\int_a^b f_A(x)\overline{P(x)}\mathrm{d}x&=\int_a^b\Big(\int_{-A}^{A}\sum_{s,t=1}^{n}\chi_s(x,\lambda)g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\Big)\overline{P(x)}\mathrm{d}x\\&=\int_{-A}^{A}\sum_{s,t=1}^{n}g_t(\lambda)\Big(\int_a^b\overline{P(x)}\chi_s(x,\lambda)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\\&=\int_{-A}^{A}\sum_{s,t=1}^{n}g_t(\lambda)\overline{Q_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda).\end{aligned}$$

另一方面, 由广义 Parseval 等式

$$\int_a^b f(x)\overline{P(x)}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}g_s(\lambda)\overline{Q_t(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{ts}(\lambda),$$

于是

$$\int_a^b(f(x)-f_A(x))\overline{P(x)}\mathrm{d}x=\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{\infty}\right)\sum_{s,t=1}^{n}g_t(\lambda)\overline{Q_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{ts}(\lambda).$$

利用 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b (f(x)-f_A(x))\overline{P(x)}\mathrm{d}x\right|^2\\
\leqslant&\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{\infty}\right)\sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\cdot\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{\infty}\right)\sum_{s,t=1}^n Q_t(\lambda)\overline{Q_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\\
\leqslant&\left[\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{\infty}\right)\sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\right]\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^n Q_t(\lambda)\overline{Q_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\\
=&\left[\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{\infty}\right)\sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\right]\int_a^b |P(x)|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

取

$$P(x)=\begin{cases} f(x)-f_A(x), & x\in[\alpha,\beta]\subset(a,b),\\ 0, & x\in(a,b)\backslash[\alpha,\beta],\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\alpha^\beta |f(x)-f_A(x)|^2\,\mathrm{d}x\right|^2\\
\leqslant&\left[\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{\infty}\right)\sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\right]\int_\alpha^\beta |f(x)-f_A(x)|^2\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

即

$$\int_\alpha^\beta |f(x)-f_A(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{\infty}\right)\sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

右边与 α,β 无关, 所以当 $\alpha\searrow a$, $\beta\nearrow b$ 时, 可得

$$\int_a^b |f(x)-f_A(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{\infty}\right)\sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda).$$

这样当 $A\to\infty$ 便有

$$\lim_{A\to\infty}\|f-f_A\|^2=0,$$

故

$$f(x)=\lim_{A\to\infty}f_A(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^n \chi_s(x,\lambda)g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

等式按 $L^2(a,b)$ 收敛意义成立.

5.2 逆变换定理, 谱矩阵的唯一性

从 5.1 节中可知 σ: $L^2(a,b) \to L^2_\rho(-\infty,\infty), \sigma f = \boldsymbol{g}$ 是一个等距线性映射, 它是一个酉映射吗? 即 σ 是否为满射?

引理 5.2.1(Levinson) 设 $\boldsymbol{g} \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n} g_s(\lambda)\overline{g_t(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{ts}(\lambda) < \infty,$$

令 $f_A(x) = \displaystyle\int_{-A}^{A} \sum_{s,t=1}^{n} \chi_s(x,\lambda) g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)$(这是一个 x 的连续函数!), 则存在 $f \in L^2(a,b)$, 使得在 $L^2(a,b)$ 收敛意义下,

$$\lim_{A\to\infty} f_A = f$$

且

$$\|f\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{g}\|_\rho^2.$$

证明 设 $P \in L^2(a,b)$, $\mathrm{supp}P$ 紧, $\boldsymbol{G} \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 是它对应的元素.

$$\begin{aligned}\int_a^b \overline{P(x)} f_A(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(\int_{-A}^{A} \sum_{s,t=1}^{n} \chi_s(x,\lambda) g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\right)\overline{P(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-A}^{A} \sum_{s,t=1}^{n} g_t(\lambda)\left(\int_a^b \chi_s(x,\lambda)\overline{P(x)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda) \\ &= \int_{-A}^{A} \sum_{s,t=1}^{n} g_t(\lambda)\overline{G_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),\end{aligned}$$

当 $B > A$ 时,

$$\int_a^b (f_B(\lambda) - f_A(x))\overline{P(x)}\mathrm{d}x = \left(\int_{-B}^{-A} + \int_A^B\right) \sum_{s,t=1}^{n} g_t(\lambda)\overline{G_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

于是

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b (f_B(\lambda) - f_A(x))\overline{P(x)}\mathrm{d}x\right|^2 \\ \leqslant &\left(\int_{-B}^{-A} \sum_{s,t=1}^{n} g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\right)\left(\int_{-B}^{-A} \sum_{s,t=1}^{n} G_t(\lambda)\overline{G_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_A^B \sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\right)\left(\int_A^B \sum_{s,t=1}^n G_t(\lambda)\overline{G_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\right)\\
\leqslant &\left(\int_{-B}^{-A}+\int_A^B\right)\sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\cdot\int_a^b |P(x)|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

令

$$
P(x)=\begin{cases} f_B(x)-f_A(x), & x\in[\alpha,\beta]\subset(a,b),\\ 0, & x\in(a,b)\backslash[\alpha,\beta],\end{cases}
$$

则得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\alpha^\beta |f_B(x)-f_A(x)|^2\,\mathrm{d}x\right|^2\\
\leqslant &\left(\int_{-B}^{-A}+\int_A^B\right)\sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\cdot\int_\alpha^\beta |f_B(x)-f_A(x)|^2\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\int_\alpha^\beta |f_B(x)-f_A(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{-B}^{-A}+\int_A^B\right)\sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)
$$

(如果取 $A=0$, 则 $f_B\in L^2(a,b)$!) 上式右边与 α,β 无关, 故

$$
\int_a^b |f_B(x)-f_A(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_{-B}^{-A}+\int_A^B\right)\sum_{s,t=1}^n g_t(\lambda)\overline{g_s(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda).
$$

这表示 $\{f_A\}$ 是 $L^2(a,b)$ 的基本列, 所以存在 $f\in L^2(a,b)$ 使得

$$
\lim_{A\to\infty} f_A=f.
$$

如果在前面的不等式中取 $A=0$, 让 $B\to\infty$, 则有 $\|f\|^2\leqslant\|\boldsymbol{g}\|_\rho^2$.

所以在 $L^2(a,b)$ 收敛意义下,

$$
f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^n \chi_s(x,\lambda)g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda).
$$

还需要

引理 5.2.2　设对某个 μ, $\mathrm{Im}\mu\neq 0$, 方程

$$
My=\mu y
$$

在 $L^2(a,b)$ 中没有非零解. $f \in L^2(a,b), \boldsymbol{g} \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 满足

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n} \chi_s(x,\lambda) g_t(\lambda) \mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

等式按 $L^2(a,b)$ 收敛意义成立, 则方程

$$My - \mu y = f$$

在 $L^2(a,b)$ 中有唯一解

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n} \frac{\chi_s(x,\lambda)}{\lambda - \mu} g_t(\lambda) \mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

等式也是按 $L^2(a,b)$ 收敛意义成立.

证明 (1) F 的存在性.

对 λ 的有限区间 Δ, 令

$$f_\Delta(x) = \int_\Delta \sum_{s,t=1}^{n} \chi_s(x,\lambda) g_t(\lambda) \mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

$$F_\Delta(x) = \int_\Delta \sum_{s,t=1}^{n} \frac{\chi_s(x,\lambda)}{\lambda - \mu} g_t(\lambda) \mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

由于 Δ 有限, 显然有

$$(M-\mu)F_\Delta = f_\Delta,$$

按假定

$$\lim_{\Delta \to (-\infty,\infty)} f_\Delta = f,$$

而 $\left|\dfrac{1}{\lambda-\mu}\right| \leqslant \dfrac{1}{|\mathrm{Im}\mu|^2}$, 故 $\frac{g}{\lambda-\mu} \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 根据 Levinson 引理, 存在 $F \in L^2(a,b)$, 使得

$$\lim_{\Delta \to (-\infty,\infty)} F_\Delta = F.$$

(2) F 是解.

因为

$$(M-\mu)F_\Delta = f_\Delta,$$

由常数变易法, 存在连续函数 $\theta_s(x), s = 1,2,\cdots,n$, 使得

$$F_\Delta(x) = \sum_{s=1}^{n} C_s(\Delta)\chi_s(x,\mu) + \sum_{s=1}^{n} \chi_s(x,\mu) \int_c^x \theta_s(\tau) f_\Delta(\tau) \mathrm{d}\tau,$$

其中, $c\in(a,b)$ 是初值选取处, $C_s(\Delta)(s=1,2,\cdots,n)$ 是常数. 对固定的 x,

$$\left|\int_c^x \theta_s(\tau)f_\Delta(\tau)\mathrm{d}\tau-\int_c^x \theta_s(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\left(\int_c^x |\theta_s(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\|f_\Delta-f\|\to 0,$$

而 F_Δ 在 $L^2(a,b)$ 中收敛到 F. 由 Riesz 定理, 存在 Δ 的子列, 使 F_Δ 几乎处处收敛到 F, 所以存在 Δ 的子列, 使得对几乎一切 x,

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)}\sum_{s=1}^n C_s(\Delta)\chi_s(x,\mu)\ 存在.$$

但是 $C_s(\Delta), s=1,2,\cdots,n$ 与 x 无关, 而 $\chi_s(x,\mu), s=1,2,\cdots,n$ 线性无关, 在有限维空间里, 收敛就是坐标收敛, 故

$$C_s(\infty)=\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)}C_s(\Delta),\quad s=1,2,\cdots,n$$

存在. 这样对几乎一切 x 便有

$$F(x)=\sum_{s=1}^n C_s(\infty)\chi_s(x,\mu)+\sum_{s=1}^n \chi_s(x,\mu)\int_c^x \theta_s(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

右边是 x 的连续函数, 所以上述等式点点成立. 显然, 这就是常数变易法得到的公式. 因此 F 是方程

$$(M-\mu)y=f$$

的解.

(3) F 唯一.

因为 $F\in L^2(a,b)$, 所以如果解不唯一, 则 $(M-\mu)y=0$ 将有非零的 $L^2(a,b)$ 解, 这是不可能的.

定理 5.2.1 设方程

$$(M\pm\mathrm{i})y=0$$

没有非零的 $L^2(a,b)$ 解. 对任何 $\boldsymbol{g}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 存在 $f\in L^2(a,b)$ 使得在 $L^2(a,b)$ 度量下,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^n \chi_s(x,\lambda)g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

其中,

$$g_t(\lambda)=\int_a^b f(x)\overline{\chi_t(x,\lambda)}\mathrm{d}x,\quad t=1,2,\cdots,n,$$

等式按 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 的度量成立.

注 在 $n=2$ 时, 方程 $(M\pm \mathrm{i})y=0$ 没有平方可积的非零解意味着算子 $T_0(M)$ 在 a 与 b 都是极限点的, 它的亏指数是 $(0,0)$, $T_0(M)$ 本身就是自伴的. 所以在这种情形下, $\sigma: L^2(a,b)\to L^2_\rho(-\infty,\infty), \sigma f=g$ 是一个酉映射. 但是这种情形究竟对应着 $T_0(M)$ 的什么样的自伴延拓, 并不是清楚的.

证明 (1) f 的存在性可由 Levinson 引理得到, 由定理 5.1.2, 对这个 f, 又存在 $\widetilde{\boldsymbol{g}}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 使得若记

$$g_{\delta_j s}(\lambda)=\int_{\delta_j} f(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x,\quad s=1,2,\cdots,n,$$

则

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\boldsymbol{g}_{\delta_j}-\widetilde{\boldsymbol{g}}\right\|_\rho=0$$

且

$$\|f\|=\|\widetilde{\boldsymbol{g}}\|_\rho .$$

同时若记

$$\widetilde{f}_\Delta(x)=\int_\Delta\sum_{s,t=1}^n\chi_s(x,\lambda)\widetilde{g}_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda).$$

则有

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)}\left\|\widetilde{f}_\Delta-f\right\|=0.$$

下面要证明的是 $\|\boldsymbol{g}-\widetilde{\boldsymbol{g}}\|_\rho=0$.

(2) 根据 Levinson 引理, 若记

$$f_\Delta(x)=\int_\Delta\sum_{s,t=1}^n\chi_s(x,\lambda)g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda),$$

则

$$\lim_{\Delta\to(-\infty,\infty)}\|f_\Delta-f\|=0.$$

由引理 5.2.2, 方程

$$(M-\mathrm{i})y=f$$

在 $L^2(a,b)$ 中有唯一解 F, 其形状为

$$F(x)=\int_{-\infty}^\infty\sum_{s,t=1}^n\frac{\chi_s(x,\lambda)}{\lambda-i}g_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)$$

或

$$F(x)=\int_{-\infty}^\infty\sum_{s,t=1}^n\frac{\chi_s(x,\lambda)}{\lambda-i}\widetilde{g}_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda).$$

类似地, 由于

$$\frac{\boldsymbol{g}}{\lambda - i}, \frac{\widetilde{\boldsymbol{g}}}{\lambda - i} \in L_\rho^2(-\infty, \infty),$$

所以方程

$$(M - \mathrm{i})y = F$$

在 $L^2(a,b)$ 中也有唯一解

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n} \frac{\chi_s(x,\lambda)}{\lambda - i} \frac{g_t(\lambda)}{\lambda - i}(\lambda) \mathrm{d}\rho_{st}(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n} \frac{\chi_s(x,\lambda)}{\lambda - i} \frac{\widetilde{g}_t(\lambda)}{\lambda - i} \mathrm{d}\rho_{st}(\lambda). \end{aligned}$$

照此下去, 由于

$$\frac{\boldsymbol{g}}{(\lambda - i)^p}, \frac{\widetilde{\boldsymbol{g}}}{(\lambda - i)^p} \in L_\rho^2(-\infty, \infty),$$

故方程

$$(M - \mathrm{i})y = F_{p-1}, \quad p \geqslant 2$$

在 $L^2(a,b)$ 中有唯一解

$$\begin{aligned} F_p(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n} \frac{\chi_s(x,\lambda)}{(\lambda - i)^{p+1}} g_t(\lambda) \mathrm{d}\rho_{st}(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n} \frac{\chi_s(x,\lambda)}{(\lambda - i)^{p+1}} \widetilde{g}_t(\lambda) \mathrm{d}\rho_{st}(\lambda), \end{aligned}$$

于是得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n} \frac{\chi_s(x,\lambda)}{(\lambda - i)^p} r_t(\lambda) \mathrm{d}\rho_{st}(\lambda) = 0, \quad p = 1, 2, \cdots,$$

这里 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g} - \widetilde{\boldsymbol{g}}, r_t(\lambda) = g_t(\lambda) - \widetilde{g}_t(\lambda)$.

(3) 取

$$f(x) = \chi_{[c,c+w]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [c, c+w], \\ 0, & x \notin [c, c+w], \end{cases}$$

则 $f \in L^2(a,b)$, 按定理 5.1.2, 记它对应的元素为 $\boldsymbol{\varGamma} \in L_\rho^2(-\infty, \infty)$, 则

$$\varGamma_s(\lambda, w) = \int_c^{c+w} \overline{\chi_s(x,\lambda)} \mathrm{d}x.$$

由 (2), 在 $L^2(a,b)$ 中,

$$\int_\Delta \sum_{s,t=1}^{n} \frac{\chi_s(x,\lambda)}{(\lambda - i)^p} r_t(\lambda) \mathrm{d}\rho_{st}(\lambda) \to 0, \quad p = 1, 2, \cdots,$$

所以对 $f(x)=\chi_{[c,c+w]}$, 它弱收敛到 0, 即

$$\int_a^b f(x)\left(\int_\Delta \sum_{s,t=1}^n \frac{\chi_s(x,\lambda)}{(\lambda-i)^p} r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_\Delta \sum_{s,t=1}^n \frac{1}{(\lambda-i)^p}\overline{\Gamma_s(\lambda,w)}r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)\to 0,$$

也就是说,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^n \frac{\overline{\Gamma_s(\lambda,w)}}{(\lambda-i)^p}r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0,\quad p=1,2,\cdots.$$

由于 $\boldsymbol{r}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, $\boldsymbol{\Gamma}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 所以当 $\mathrm{Im}\mu>0$ 时, 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^n \frac{\overline{\Gamma_s(\lambda,w)}}{\lambda-\mu}r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=H(\mu)$$

有意义, 并且是上半平面的解析函数 $\left(\left|\frac{1}{(\lambda-\mu)}\right|\leqslant\frac{1}{|\mathrm{Im}\mu|}\right)$. 因为在 i 的邻域内, $|\lambda-\mu|\geqslant\frac{1}{2}$,

$$\left|\sum_{s,t=1}^n \frac{\overline{\Gamma_s(\lambda,w)}}{(\lambda-\mu)^p}r_t(\lambda)\right|\leqslant 2^p\sum_{s,t=1}^n |\overline{\Gamma_s(\lambda,w)}||r_t(\lambda)|,$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^n |\Gamma_s(\lambda,w)|\,|r_t(\lambda)|\,\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)<\infty \text{ (绝对可积!)},$$

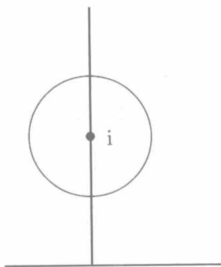


图 5.2

所以在 i 的邻域内, 积分关于 μ 是一致收敛的, 可以在积分号下求导数, 这样由

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^n \frac{\overline{\Gamma_s(\lambda,w)}}{(\lambda-i)^p}r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0,\quad p=1,2,\cdots,$$

便知 $H(\mu)$ 在点 i 本身及任意阶导数均为零. 这样由解析函数唯一性定理得

$$H(\mu)=0,\quad \mathrm{Im}\mu>0.$$

类似地, 对下半平面也有相同的结果.

(4) 设 $\mu=\xi+\mathrm{i}\eta,\eta>0$, 因为

$$\frac{1}{\lambda-\mu}-\frac{1}{\lambda-\overline{\mu}}=\frac{2\mathrm{i}\eta}{(\lambda-\xi)^2+\eta^2},$$

由 $H(\mu)=H(\overline{\mu})=0$, 得

$$\eta\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}\frac{\overline{\Gamma_s(\lambda,w)}r_t(\lambda)}{(\lambda-\xi)^2+\eta^2}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0.$$

当 λ_1,λ_2 为 ρ 的连续点时, 考虑积分

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\eta\sum_{s,t=1}^{n}\frac{\overline{\Gamma_s(\lambda,w)}r_t(\lambda)}{(\lambda-\xi)^2+\eta^2}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0,$$

由于积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}|\Gamma_s(\lambda,w)|\,|r_t(\lambda)|\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\eta}{(\lambda-\xi)^2+\eta^2}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)$$

存在, 可以交换积分次序, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}\overline{\Gamma_s(\lambda,w)}r_t(\lambda)\left(\arctan\frac{\lambda_2-\lambda}{\eta}-\arctan\frac{\lambda_1-\lambda}{\eta}\right)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0,$$

让 $\eta\to+0$, 利用 Lebesgue 控制收敛定理, 注意到 λ_1,λ_2 是 $\boldsymbol{\rho}$ 的连续点, 单点集 $\{\lambda_1\},\{\lambda_2\}$ 的 Lebesgue–Stieltjes 测度为零, 故得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{s,t=1}^{n}\overline{\Gamma_s(\lambda,w)}r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0.$$

对 w 求导数得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{s,t=1}^{n}\chi_s(c+w,\lambda)r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0,$$

逐次对 w 求导数, 然后让 $w=0$, 利用

$$\chi_s^{(t-1)}(c,\lambda)=\delta_{st},\quad s,t=1,2,\cdots,n,$$

便得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{t=1}^{n} r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0,\quad s=1,2,\cdots,n.$$

(5) 设 ζ 是 $[\lambda_1,\lambda_2]$ 里 ρ 唯一的间断点, 对

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{t=1}^{n} r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0,\quad s=1,2,\cdots,n,$$

让 $\lambda_1\to\zeta-0,\lambda_2\to\zeta+0$ 得

$$\int_{\{\zeta\}}\sum_{t=1}^{n} r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0,\quad s=1,2,\cdots,n,$$

所以对任何 $\lambda_1<\lambda_2$, 有

$$\int_{[\lambda_1,\lambda_2]\text{或}[\lambda_1,\lambda_2),(\lambda_1,\lambda_2],(\lambda_1,\lambda_2)}\sum_{t=1}^{n} r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0,\quad s=1,2,\cdots,n.$$

这样对任何的阶梯函数 $\boldsymbol{\gamma}\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, 便有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}\gamma_s(\lambda)r_t(\lambda)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=0.$$

由于阶梯函数在 $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ 中稠, 故

$$\|\boldsymbol{\gamma}\|_\rho=0.$$

定理 5.2.2 设方程

$$(M\pm\mathrm{i})y=0$$

没有非零的 $L^2(a,b)$ 解, 则谱矩阵是唯一的 —— 即若还有另一个 $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ 也使得定理 5.1.2 成立, 则在 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ 共同的连续点 λ_1,λ_2 上, 有

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\lambda_2)-\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\lambda_1)=\boldsymbol{\rho}(\lambda_2)-\boldsymbol{\rho}(\lambda_1).$$

注 这就是说在 $\boldsymbol{\rho}$ 的连续点 λ_1,λ_2 处, 有

$$\lim_{j\to\infty}\left(\rho_{\delta_j}(\lambda_2)-\rho_{\delta_j}(\lambda_1)\right)=\rho(\lambda_2)-\rho(\lambda_1),$$

不管边条件 $U_{\delta_j}f=0$ 如何取法!

证明 令

$$f(x)=\begin{cases}1, & c\leqslant x\leqslant c+w,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $f \in L^2(a,b)$, 设对应的元素是 $\boldsymbol{\Gamma} \in L^2_\rho(-\infty,\infty)$,

$$\Gamma_s(\lambda,w)=\int_c^{c+w}\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x.$$

由引理 5.2.2, 方程

$$(M-\mathrm{i})y=f$$

有唯一属于 $L^2(a,b)$ 的解

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}\frac{\chi_s(x,\lambda)}{\lambda-i}\Gamma_t(\lambda,w)\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}\frac{\chi_s(x,\lambda)}{\lambda-i}\Gamma_t(\lambda,w)\mathrm{d}\widetilde{\rho}_{st}(\lambda).$$

令 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}-\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$, $\sigma_{st}(\lambda)=\rho_{st}(\lambda)-\widetilde{\rho}_{st}(\lambda)$, 则与定理 5.2.1 的证明一样可得

$$H(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n}\frac{\overline{\Gamma_s(\lambda,\widetilde{w})}}{\lambda-\mu}\Gamma_t(\lambda,w)\mathrm{d}\sigma_{st}(\lambda)$$

在上下半平面为零. 于是

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{t=1}^{n}\Gamma_t(\lambda,w)\mathrm{d}\sigma_{st}(\lambda)=0,\quad s=1,2,\cdots,n,$$

对 w 求导得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{t=1}^{n}\overline{\chi_t(c+w,\lambda)}\mathrm{d}\sigma_{st}(\lambda)=0,\quad s=1,2,\cdots,n.$$

逐次对 w 求导, 然后让 $w=0$, 利用 $\chi_s^{(t-1)}(c,\lambda)=\delta_{st}$ 可得

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\mathrm{d}\sigma_{st}(\lambda)=0,\quad s,t=1,2,\cdots,n,$$

即

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\mathrm{d}\rho_{st}(\lambda)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\mathrm{d}\widetilde{\rho}_{st}(\lambda),\quad s,t=1,2,\cdots,n.$$

故

$$\boldsymbol{\rho}(\lambda_2)-\boldsymbol{\rho}(\lambda_1)=\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\lambda_2)-\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\lambda_1).$$

考虑使定理 5.2.1 和定理 5.2.2 成立的另一种情形. 假使 a,b 中有一点是正则的, 如 a 是一个正则点, 考虑 $[a,b)$, 则

$$\delta=[a,\widetilde{b}],$$

假定在 a 点给了 m 个线性无关的边界条件

$$\sum_{j=1}^{n}M_{ij}f^{(j-1)}(a)=0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

这些条件与 $\widetilde{b}$ 选取无关, 即与 δ 无关, 把它记作

$$U^{(1)}f=0,$$

假设可以再附上 $n-m$ 边界条件 (与 δ 有关) , 记为

$$U_\delta^{(2)}f=0,$$

使得算子 T_δ

$$\mathscr{D}(T_\delta)=\{f\in\mathscr{D}(T_1(M|_\delta))|U_\delta f=0(U^{(1)}f=0,U_\delta^{(2)}f=0)\},$$

$$T_\delta f=Mf,\quad f\in\mathrm{D}(T_\delta)$$

是 $T_0(M|_\delta)$ 的自伴延拓. 存在着边值问题

$$\begin{cases}My=\lambda y,\\ U^{(1)}y=0\end{cases}$$

的 $n-m$ 个线性无关的解

$$\varphi_k(x,\lambda),\quad k=1,2,\cdots,n-m.$$

这一点可以这样来作: 取一个非退化的 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{jk})$, 假定它的前 m 行, 即

$$\begin{pmatrix}M_{11}&\cdots&M_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ M_{m1}&\cdots&M_{mn}\end{pmatrix},$$

设

$$\varepsilon_{m+k}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m\text{ 个}\\ \\ \\ \text{——第 } m+k \text{ 行}\\ \\ \\ \end{matrix},$$

设 $\boldsymbol{v}^{(k)}$ 是方程

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}^{(k)}=\boldsymbol{\varepsilon}_{m+k},\quad k=1,2,\cdots,n-m$$

的解,

$$\boldsymbol{v}^{(k)}=\begin{pmatrix} v_1^{(k)} \\ \vdots \\ v_n^{(k)} \end{pmatrix},$$

令

$$\varphi_k(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}v_j^{(k)}\chi_j(x,\lambda),\quad k=1,2,\cdots,n-m,$$

其中, $\chi_j(x,\lambda)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} My=\lambda y, \\ y^{(k-1)}(a)=\delta_{jk},\quad k=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

的解. 则

$$\varphi_k^{(j-1)}(a,\lambda)=v_j^{(k)},\quad \text{与 } \lambda \text{ 无关!}$$

于是

$$\boldsymbol{U}_\delta\boldsymbol{\varphi}_k=\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{m1} & \cdots & M_{mn} \\ & * & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(k)} \\ \vdots \\ v_n^{(k)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \end{pmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{U}^{(1)}\boldsymbol{\varphi}_k=0,\quad k=1,\cdots,n-m.$$

由于 $\boldsymbol{R}$ 是非退化的, 而 $\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关, 故 $\boldsymbol{v}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{v}^{(n-m)}$ 线性无关, 因此 $\boldsymbol{\varphi}_1,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_{n-m}$ 是

$$\begin{cases} My=\lambda y, \\ U^{(1)}y=0 \end{cases}$$

的 $n-m$ 个线性无关的解. 此外还有

$$\sum_{j=1}^{n}r_{m+lj}v_j^{(k)}=\delta_{kl}\ ,\quad k,l=1,\cdots,n-m.$$

这样任何一个特征函数 $\psi_{\delta j}$,

$$\begin{cases} M\psi_{\delta j}=\lambda_{\delta j}\psi_{\delta j}, \\ U_\delta\psi_{\delta j}=0. \end{cases}$$

因为满足 $U^{(1)}\psi_{\delta j}=0$, 而 $v^{(1)},\cdots,v^{(n-m)}$ 是方程

$$\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{m1} & \cdots & M_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

的基本解组, 所以

$$\begin{pmatrix} \psi_{\delta j}(a) \\ \vdots \\ \psi_{\delta j}^{(n-1)}(a) \end{pmatrix}=\sum_{l=1}^{n-m}C_{\delta jl}\begin{pmatrix} v_1^{(l)} \\ \vdots \\ v_n^{(l)} \end{pmatrix}=\sum_{l=1}^{n-m}C_{\delta jl}\begin{pmatrix} \varphi_k(a) \\ \vdots \\ \varphi_k^{(n-1)}(a) \end{pmatrix}.$$

这样由 Cauchy 问题解的唯一性便可得

$$\psi_{\delta j}(x)=\sum_{l=1}^{n-m}\widehat{r}_{\delta jl}\varphi_l(x,\lambda_{\delta j}).$$

另一方面,

$$\psi_{\delta j}(x)=\sum_{k=1}^{n}r_{\delta jk}\chi_k(x,\lambda_{\delta_j}),$$

可以在 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-m}$ 上增加上 $\varphi_{n-m+1},\cdots,\varphi_n$ 使之成为微分方程的基本解组, 于是 $\chi_k(x,\lambda)=\sum\limits_{j=1}^{n}d_{jk}\varphi_j(x,\lambda)$. 对任何 $u\in L^2(\delta)$, 由 Parseval 等式有

$$\begin{aligned}
\|u\|_\delta^2&=\sum_{j=1}^{\infty}|(u,\psi_{\delta j})_\delta|^2\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{n-m}\overline{\widehat{r}_{\delta js}}\int_\delta u(x)\overline{\varphi_s(x,\lambda_{\delta_j})}\mathrm{d}x\right)\left(\sum_{t=1}^{n-m}\widehat{r}_{\delta jt}\int_\delta \overline{u(x)}\varphi_t(x,\lambda_{\delta_j})\mathrm{d}x\right)\\
&=\sum_{s,t=1}^{n-m}\sum_{j=1}^{\infty}g_{\delta s}(\lambda_{\delta_j})\overline{g_{\delta t}(\lambda_{\delta_j})\widehat{r}_{\delta_j s}}\widehat{r}_{\delta_j t},
\end{aligned}$$

其中,

$$g_{\delta s}(\lambda)=\int_\delta u(x)\overline{\varphi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x,\quad s=1,2,\cdots,n-m.$$

令 $\widehat{\rho}_{\delta ts}$ 为右连续的阶梯函数, 使得

$$\widehat{\rho}_{\delta ts}(\lambda_{\delta_j})-\widehat{\rho}_{\delta ts}(\lambda_{\delta_j}-0)=\sum_{\lambda_{\delta p}=\lambda_{\delta j}}\overline{\widehat{r}_{\delta js}}\widehat{r}_{\delta jt},$$

则

$$\|u\|_\delta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n-m} g_{\delta s}(\lambda)\overline{g_{\delta t}(\lambda)}\mathrm{d}\widehat{\rho}_{\delta ts}(\lambda).$$

同样按 5.1 节, 又有

$$\|u\|_\delta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n} G_{\delta s}(\lambda)\overline{G_{\delta t}(\lambda)}\mathrm{d}\rho_{ts}(\lambda),$$

其中,

$$G_{\delta s}(\lambda) = \int_\delta u(x)\overline{\chi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x.$$

而

$$\begin{aligned}\psi_{\delta j}(x) &= \sum_{k=1}^{n} r_{\delta jk}\chi_k(x,\lambda_{\delta j}) = \sum_{k=1}^{n} r_{\delta jk}\sum_{l=1}^{n} d_{lk}\varphi_l(x,\lambda_{\delta j}) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} d_{lk} r_{\delta jk}\right)\varphi_l(x,\lambda_{\delta j}),\end{aligned}$$

所以

$$\widehat{\boldsymbol{r}}_{\delta_j} = \begin{pmatrix} \widehat{r}_{\delta_j 1} \\ \vdots \\ \widehat{r}_{\delta_j n-m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} d_{1k} r_{\delta jk} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} d_{nk} r_{\delta jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{\delta j1} \\ \vdots \\ r_{\delta jn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{r}_{\delta j},$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_{\delta p}=\lambda_{\delta j}} \overline{\widehat{r}_{\delta js}}\widehat{r}_{\delta jt} &= \sum_{\lambda_{\delta p}=\lambda_{\delta j}} \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} d_{sk} r_{\delta jk}\right)}\left(\sum_{l=1}^{n} d_{tl} r_{\delta jl}\right) \\ &= \sum_{l,k=1}^{n} d_{tl}\left(\sum_{\lambda_{\delta p}=\lambda_{\delta j}} \overline{\widehat{r}_{\delta jk}}\widehat{r}_{\delta jl}\right)\overline{d_{sk}},\end{aligned}$$

所以 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_\delta = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\rho}_\delta\boldsymbol{D}^*$(* 表示 Hermitian). 这里当 $t, s > n-m$ 时,

$$\widehat{\rho}_{\delta ts} = 0,$$

显然 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_\delta$ 也具有 $\boldsymbol{\rho}_\delta$ 所具有的那 3 条性质. 仿照 5.1 节中 Levitan 定理的证明, 如果对某个子列

$$\delta_j \to [a,b), \quad j\to\infty$$

有

$$\lim_{j\to\infty} \boldsymbol{\rho}_{\delta_j} = \boldsymbol{\rho},$$

则

$$\lim_{j\to\infty} \widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\delta_j} = \widehat{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{D}^*.$$

显然当 $t, s > n-m$ 时,

$$\widehat{\rho}_{ts} = 0.$$

同样地, 定理 5.1.2 的结果成立: 对任意的 $f \in L^2[a,b)$, 有 Parseval 等式

$$\|f\|^2 = \|\boldsymbol{g}\|^2_{\widehat{\rho}},$$

其中, 在 $L^2_{\widehat{\rho}}(-\infty,\infty)$ 度量下,

$$g_s(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\varphi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x, \quad s = 1,2,\cdots,n-m.$$

并且展开式成立, 即在 $L^2[a,b)$ 度量下,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n-m} \varphi_s(x,\lambda) g_t(\lambda) \mathrm{d}\widehat{\rho}_{st}(\lambda).$$

另外, Levinson 引理也成立, 即若 $\boldsymbol{g} \in L^2_{\widehat{\rho}}(-\infty,\infty)$, 则存在 $f \in L^2[a,b)$, 使得在 $L^2[a,b)$ 度量下,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n-m} \varphi_s(x,\lambda) g_t(\lambda) \mathrm{d}\widehat{\rho}_{st}(\lambda).$$

类似于引理 5.2.2, 有

引理 5.2.3 设对某个 μ, $\mathrm{Im}\mu \neq 0$, 边值问题

$$\begin{cases} My = \mu y, \\ U^{(1)}y = 0 \end{cases}$$

在 $L^2[a,b)$ 中没有非零解. 又设 $f \in L^2[a,b)$, $\boldsymbol{g} \in L^2_{\widehat{\rho}}(-\infty,\infty)$, 满足

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s,t=1}^{n-m} \varphi_s(x,\lambda) g_t(\lambda) \mathrm{d}\widehat{\rho}_{st}(\lambda),$$

等式按 $L^2[a,b)$ 度量成立, 则问题

$$\begin{cases} My - \mu y = f, \\ U^{(1)}y = 0 \end{cases}$$

在 $L^2[a,b)$ 中有唯一解

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n-m}\frac{\varphi_s(x,\lambda)}{\lambda-\mu}g_t(\lambda)\mathrm{d}\widehat{\rho}_{st}(\lambda),$$

等式也是按 $L^2[a,b)$ 度量成立.

证明 对 λ 的有限区间 Δ, 令

$$f_\Delta(x)=\int_\Delta\sum_{s,t=1}^{n-m}\varphi_s(x,\lambda)g_t(\lambda)\mathrm{d}\widehat{\rho}_{st}(\lambda),$$

$$F_\Delta(x)=\int_\Delta\sum_{s,t=1}^{n-m}\frac{\varphi_s(x,\lambda)}{\lambda-\mu}g_t(\lambda)\mathrm{d}\widehat{\rho}_{st}(\lambda),$$

则

$$\begin{cases}(M-\mu)F_\Delta=f_\Delta,\\ U^{(1)}F_\Delta=0,\end{cases}$$

其余的证明与引理 5.2.2 证明相同.

类似于定理 5.2.1 与定理 5.2.2 有

定理 5.2.3 设边值问题

$$\begin{cases}(M\pm \mathrm{i})y=0,\\ U^{(1)}y=0\end{cases}$$

在 $L^2[a,b)$ 中没有非零解. $\boldsymbol{g}\in L^2_{\widehat{\rho}}(-\infty,\infty)$, 则存在 $f\in L^2[a,b)$, 使得在 $L^2[a,b)$ 度量下,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{s,t=1}^{n-m}\varphi_s(x,\lambda)g_t(\lambda)\mathrm{d}\widehat{\rho}_{st}(\lambda),$$

其中,

$$g_t(\lambda)=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_s(x,\lambda)}\mathrm{d}x,\quad t=1,2,\cdots,n-m,$$

等式按 $L^2_{\widehat{\rho}}(-\infty,\infty)$ 度量成立. 同时 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ 是唯一的 —— 即若还存在一个 $\widetilde{\widehat{\boldsymbol{\rho}}}$ 也使得展开式与 Parseval 等式成立, 那么在 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ 和 $\widetilde{\widehat{\boldsymbol{\rho}}}$ 共同的连续点 λ_1,λ_2 上, 有

$$\widetilde{\widehat{\boldsymbol{\rho}}}(\lambda_2)-\widetilde{\widehat{\boldsymbol{\rho}}}(\lambda_1)=\widehat{\boldsymbol{\rho}}(\lambda_2)-\widehat{\boldsymbol{\rho}}(\lambda_1).$$

注 这表示在 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}(\lambda)$ 的连续点 λ_1,λ_2 处, 有

$$\lim_{j\to\infty}\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\delta_j}(\lambda_2)-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\delta_j}(\lambda_1)\right)=\widehat{\boldsymbol{\rho}}(\lambda_2)-\widehat{\boldsymbol{\rho}}(\lambda_1),$$

不管 δ_j 上的边界条件 $U_{\delta_j}^{(2)}f=0$ 如何选取. 称 $\widehat{\rho}$ 是问题

$$\begin{cases} My=\lambda y, \\ U^{(1)}y=0 \end{cases}$$

关于 $\{\varphi_k(x,\lambda)|k=1,2,\cdots,n-m\}$ 的谱矩阵.

5.3 Green 函数与谱矩阵的表示

设 $G_\delta(x,t,\lambda)$ 是区间 δ 上的 Green 函数.

引理 5.3.1 集合 $\{G_\delta\}$ 在 $(x,t,\lambda),\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ 的每个紧区域上一致有界等度连续 ($n=1$ 时还要去掉直线 $x=t$).

证明 定义在 $a<x,t<b$ 上的函数 $K(x,t)$ 是利用常数变易法解 $My=f$ 得到的积分表达式的核, 即

$$\int_\delta K(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

是 $My=f$ 在 $\delta\subset(a,b)$ 上的解! 设 δ_0,δ_1 是 (a,b) 的闭子区间且 $\delta_0\subset\overset{\circ}{\delta}_1$, 取 $\mu\in C_0^\infty(a,b)$, 使得

$$\mu(x)=\begin{cases} 1, & x\in\delta_0, \\ 0, & x\notin\delta_1 \end{cases}$$

(所以在 δ_0 的端点上 μ 的各阶导数为 0!). 令

$$J(x,t)=\mu(x)K(x,t),\quad t\in\delta_0,$$

设 $\delta\supset\delta_1$,

$$u(\cdot)=G(\cdot,t,\lambda)+J(\cdot,t),\quad t\in\delta_0.$$

这是一个定义在 δ 上的函数, 由于 Green 函数 G_δ 与 $-K$ 在 $x<t$ 和 $x>t$ 上都属于 C^n, 而在 $x=t$ 时, 它们的 $n-2$ 阶导数连续, $n-1$ 阶导数跃度一样, 所以 $u^{(n-1)}$ 在 $x=t$ 处也连续. 由于 $x\neq t$ 时,

$$\begin{aligned} &MG_\delta=\lambda G_\delta, \\ &MK=0, \end{aligned}$$

所以解出 $u^{(n)}$ 便知道 $u^{(n)}$ 在 $x=t$ 处也连续. 于是

$$u\in C^n(\delta),\quad t\in\delta_0.$$

由于 $\mathrm{supp}\mu \subset \delta_1, U_\delta J = 0$, 因而 $U_\delta u = 0$, 这样便知道当 $x \neq t$ 时,

$$(M-\lambda)u = (M-\lambda)J,$$

所以

$$\begin{cases} (M-\lambda)u = (M-\lambda)J, \\ U_\delta u = 0 \end{cases}$$

(上式右端在 $x > t$ 和 $x < t$ 连续, $x = t$ 是个零测度集, 所以右端在 δ 上平方可积). 因此

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_\delta G_\delta(x,\tau,\lambda)(M_\tau - \lambda)J(\tau,t)\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_{\delta_1} G_\delta(x,\tau,\lambda)(M_\tau - \lambda)J(\tau,t)\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

即

$$G_\delta(x,t,\lambda) = -J(x,t) - \int_{\delta_1} G_\delta(x,\tau,\lambda)(M_\tau - \lambda)J(\tau,t)\mathrm{d}\tau.$$

(1) 一致有界性.

$$\begin{aligned} |G_\delta(x,t,\lambda)| &= |J(x,t)| + \textstyle\int_{\delta_1} |G_\delta(x,\tau,\lambda)|\,|(M_\tau - \lambda)J(\tau,t)|\,\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant |J(x,t)| + \|G_\delta(x,\cdot,\lambda)\|_{\delta_1} \|(M-\lambda)J(\cdot,t)\|_{\delta_1}, \end{aligned}$$

要证明当 $x, t \in \delta_0, \lambda \in \mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 的紧集 Λ 时, $|G_\delta(x,t,\lambda)|$ 是一致有界的. 关键在于估计 $\|G_\delta(x,\cdot,\lambda)\|_{\delta_1}$. 对 $f \in L^2(\delta)$, 有

$$u(x) = (G_\delta(\lambda)f)(x) = \int_\delta G_\delta(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t$$

满足

$$\begin{cases} \lambda u - Mu = f, \\ U_\delta u = 0. \end{cases}$$

由自伴性

$$\int_\delta Mu \cdot \overline{u}\mathrm{d}x = \int_\delta u \cdot \overline{Mu}\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_\delta (\lambda u - f) \cdot \overline{u}\mathrm{d}x = \int_\delta u \cdot \overline{(\lambda u - f)}\mathrm{d}x.$$

由此可得

$$2\mathrm{i}\mathrm{Im}\lambda \|u\|_\delta^2 = \int_\delta (\overline{u}f - u\overline{f})\mathrm{d}x.$$

故

$$2\,|\mathrm{Im}\lambda|\,\|u\|_\delta^2 \leqslant \int_\delta \left(|\overline{u}f| + |u\overline{f}|\right) \mathrm{d}x \leqslant 2\|f\|_\delta\|u\|_\delta,$$

$$\|u\|_\delta \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|f\|_\delta.$$

这表明 $G_\delta(\lambda)$ 是个有界线性算子, 现在将它用于 $u(\cdot) = G(\cdot,t,\lambda) + J(\cdot,t)$, 得

$$\|G(\cdot,t,\lambda) + J(\cdot,t)\|_\delta \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|(M-\lambda)J(\cdot,t)\|_\delta,$$

故

$$\begin{aligned}\|G(\cdot,t,\lambda)\|_\delta &\leqslant \|J(\cdot,t)\|_\delta + \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|(M-\lambda)J(\cdot,t)\|_\delta \\ &= \|J(\cdot,t)\|_{\delta_1} + \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|(M-\lambda)J(\cdot,t)\|_{\delta_1}.\end{aligned}$$

当 $\lambda \in \Lambda$ 时, $\dfrac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}$ 有界, 右端显然与 δ 无关且关于 $t \in \delta_0$ 连续, 所以左端关于 $t \in \delta_0$, $\lambda \in \Lambda$, $\delta \supset \delta_1$ 是一致有界的.

$$\begin{aligned}((T_\delta-\lambda)f,g) &= \left(f,(T_\delta-\overline{\lambda})g\right), \\ &= \left((T_\delta-\lambda)f, G_\delta(\overline{\lambda})(T_\delta-\overline{\lambda})g\right) = \left(G_\delta(\overline{\lambda})^*(T_\delta-\lambda)f,(T_\delta-\overline{\lambda})g\right), \\ &\quad f,g\in\mathscr{D}(T_\delta),\end{aligned}$$

所以

$$G_\delta(\overline{\lambda})^*(T_\delta-\lambda) = I|_{\mathscr{D}(T_\delta)}, \quad G_\delta(\overline{\lambda})^* = G_\delta(\lambda),$$

即

$$\overline{G_\delta(t,x,\overline{\lambda})} = G_\delta(x,t,\lambda),$$

所以 $\|G_\delta(x,\cdot,\lambda)\|_\delta$ 关于 $x\in\delta_0$, $\lambda\in\Lambda$, $\delta\supset\delta_1$ 也一致有界. 由此可得 $G_\delta(x,t,\lambda)$ 在 $x,t\in\delta_0$, $\lambda\in\Lambda$ 上一致有界.

(2) 等度连续性 ($n=1$ 时, 直线 $x=t$ 除外).

(i) $\dfrac{\partial G_\delta(x,t,\lambda)}{\partial t} = \dfrac{-\partial J(x,t)}{\partial t} - \int_{\delta_1} G_\delta(x,\tau,\lambda)\dfrac{\partial}{\partial t}(M_\tau-\lambda)J(\tau,t)\mathrm{d}\tau$, 用同样的方法可证得 $\dfrac{\partial G_\delta(x,t,\lambda)}{\partial t}$ 关于 $x,t\in\delta_0$, $\lambda\in\Lambda$ 是一致有界的;

(ii) 利用对称性知 $\dfrac{\partial G_\delta(x,t,\lambda)}{\partial x}$ 关于 $x,t\in\delta_0$, $\lambda\in\Lambda$ 也是一致有界的;

(iii) $G_\delta(x,t,\lambda), \mathrm{Im}\lambda\neq 0$ 是 λ 的解析函数, 而 $\{G_\delta\}$ 关于 $x,t\in\delta_0,\lambda\in\Lambda$ 一致有界, 所以由

$$\frac{\partial G_\delta(x,t,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{G_\delta(x,t,\zeta)}{(\zeta-\lambda)^2}\mathrm{d}\zeta$$

知 $\dfrac{\partial G_\delta(x,t,\lambda)}{\partial\lambda}$ 关于 $x,t\in\delta_0$, $\lambda\in\Lambda$ 也一致有界. 这样由 (i)~(iii) 便得到 $\{G_\delta\}$ 在 $x,t\in\delta_0$, $\lambda\in\Lambda$ 上的等度连续性.

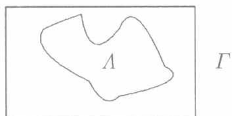


图 5.3

定理 5.3.1　设 $\{G_\delta\}$ 是自伴算子 T_δ 的 Green 函数集合, 其中, 闭区间 $\delta\subset(a,b)$, 则可以从 $\{G_\delta\}$ 中抽出收敛的子列来,

$$\lim_{m\to\infty}G_{\delta_m}=G,$$

$G(x,t,\lambda)$ 对于 $x,t\in(a,b)$(当 $n=1$ 时, 直线 $x=t$ 除外) 和 $\mathrm{Im}\lambda\neq0$ 连续, 关于 λ 解析且具有下列性质:

(1) $\dfrac{\partial^kG}{\partial x^k},k=0,1,\cdots,n-2$ 在 $x,t\in(a,b)$ 上连续, $\dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}$和 $\dfrac{\partial^nG}{\partial x^n}$ 分别在 $x\leqslant t$ 和 $x\geqslant t$ 上连续;

(2) $\dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(t+0,t,\lambda)-\dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(t-0,t,\lambda)=\dfrac{-1}{p_n(t)},a<t<b$;

(3) 当 $x\neq t$ 时, G 关于 x 满足方程 $My=\lambda y$;

(4) $\dfrac{\partial^{j+k}G_m}{\partial x^j\partial t^k}\to\dfrac{\partial^{j+k}G}{\partial x^j\partial t^k},j,k=0,1,\cdots,n-1$. 当 $j,k\neq n-1$ 时, 收敛在 $x,t\in(a,b),\mathrm{Im}\lambda\neq0$ 的紧区域上是一致的, 当 j 或 $k=n-1$ 时, 收敛在 $x,t\in(a,b),x\neq t,\mathrm{Im}\lambda\neq0$ 的紧区域上是一致的;

(5) $G(x,t,\lambda)=\overline{G(t,x,\overline{\lambda})}$;

(6) $G(x,\cdot,\lambda)\in L^2(a,b),x\in(a,b)$;

(7) 若 $f\in L^2(a,b)$, 则

$$v(x)=\int_a^bG(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Im}\lambda\neq0$$

属于

$$\mathscr{D}=\left\{u\in L^2(a,b)|u\in C^{n-1}(a,b),u^{(n-1)}\in AC_{\mathrm{loc}}(a,b),Mu\in L^2(a,b)\right\}$$

(这是 $T_1(M)$ 的定义域) 且

$$Mv=\lambda v+f.$$

证明　由 Arzela–Ascoli 定理, 存在 $\delta_m\subset(a,b),m=2,3,\cdots$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}\delta_m=(a,b),$$

$$G_m(x,t,\lambda)=G_{\delta_m}(x,t,\lambda)$$

在 $x,t\in(a,b),\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ 的每个紧子集上一致收敛到某个 $G(x,t,\lambda)$. 取一串紧子集 K_j, 使得

$$K_j\to x,t\in(a,b),\quad \mathrm{Im}\lambda\neq 0.$$

再用 Cantor 对角线技术便可得到这样的 δ_m. 显然 $G(x,t,\lambda)$ 定义在 $x,t\in(a,b),\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ 上, 连续并且关于 λ 解析.

(1) 对于 $x,t\in\delta_0,\mathrm{Im}\lambda\neq 0,\delta\supset\delta_1\supset\delta_0$, 有

$$G_\delta(x,t,\lambda)=-J(x,t)-\int_{\delta_1}G_\delta(x,\tau,\lambda)(M_\tau-\lambda)J(\tau,t)\mathrm{d}\tau.$$

于是当 $x,t\in\delta_0$ 时,

$$\frac{\partial^j G_\delta(x,t,\lambda)}{\partial t^j}=-\frac{\partial^j K(x,t)}{\partial t^j}-\int_{\delta_1}G_\delta(x,\tau,\lambda)\frac{\partial^j}{\partial t^j}(M_\tau-\lambda)J(\tau,t)\mathrm{d}\tau,\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

当 $x\neq t$ 时,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_{\delta_1}G_\delta(x,\tau,\lambda)\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}(\lambda J(\tau,t)-M_\tau J(\tau,t))\mathrm{d}\tau\\
=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\delta_1^-}^{t}+\int_t^{\delta_1^+}\right)G_\delta(x,\tau,\lambda)\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}(\lambda J(\tau,t)-M_\tau J(\tau,t))\mathrm{d}\tau\\
=&\int_{\delta_1^-}^{t}G_\delta(x,\tau,\lambda)\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}(\lambda J(\tau,t)-M_\tau J(\tau,t))\mathrm{d}\tau\\
&+G_\delta(x,t-0,\lambda)\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}(\lambda J(t-0,t)-MJ(t-0,t))\\
&+\int_t^{\delta^+}G_\delta(x,\tau,\lambda)\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}(\lambda J(\tau,t)-M_\tau J(\tau,t))\mathrm{d}\tau\\
&-G_\delta(x,t+0,\lambda)\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}(\lambda J(t+0,t)-MJ(t+0,t))\\
=&\int_{\delta_1}G_\delta(x,\tau,\lambda)\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}(\lambda J(\tau,t)-M_\tau J(\tau,t))\mathrm{d}\tau\\
&-G_\delta(x,t,\lambda)\Big(\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}(\lambda J(t+0,t)-MJ(t+0,t))\\
&-\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}(\lambda J(t-0,t)-MJ(t-0,t))\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\delta_1} G_\delta(x,\tau,\lambda) \frac{\partial^n}{\partial t^n}(\lambda J(\tau,t) - M_\tau J(\tau,t))\mathrm{d}\tau \\
&\quad - G_\delta(x,t,\lambda)\Big(\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}(\lambda K(t+0,t) - MK(t+0,t)) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}(\lambda K(t-0,t) \\
&\quad - MK(t-0,t))\Big) \\
&= \int_{\delta_1} G_\delta(x,\tau,\lambda) \frac{\partial^n}{\partial t^n}(\lambda J(\tau,t) - M_\tau J(\tau,t))\mathrm{d}\tau + (-1)^n \frac{\lambda G_\delta(x,t,\lambda)}{p_n(t)},
\end{aligned}
$$

所以当 $x \neq t$ 时,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^n G_\delta(x,t,\lambda)}{\partial t^n} \\
&= -\frac{\partial^n K(x,t)}{\partial t^n} + \int_{\delta_1} G_\delta(x,\tau,\lambda) \frac{\partial^n}{\partial t^n}(\lambda J(\tau,t) - M_\tau J(\tau,t))\mathrm{d}\tau + (-1)^n \frac{\lambda G_\delta(x,t,\lambda)}{p_n(t)},
\end{aligned}
$$

利用 G_m 在紧集上的一致收敛可得: 当 $x, t \in \delta_0, \mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 时,

$$
G(x,t,\lambda) = -J(x,t) - \int_{\delta_1} G(x,\tau,\lambda)(M_\tau - \lambda)J(\tau,t)\mathrm{d}\tau,
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^j G(x,t,\lambda)}{\partial t^j} \\
&= -\frac{\partial^j K(x,t)}{\partial t^j} - \int_{\delta_1} G(x,\tau,\lambda) \frac{\partial^j}{\partial t^j}(M_\tau - \lambda)J(\tau,t)\mathrm{d}\tau, \quad j = 0,1,\cdots,n-1,
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^n G(x,t,\lambda)}{\partial t^n} = &-\frac{\partial^n K(x,t)}{\partial t^n} + \int_{\delta_1} G(x,\tau,\lambda) \\
&\frac{\partial^n}{\partial t^n}(\lambda J(\tau,t) - M_\tau J(\tau,t))\mathrm{d}\tau + (-1)^n \frac{\lambda G(x,t,\lambda)}{p_n(t)}, \quad t \neq x.
\end{aligned}
$$

由于有性质 (5), 借助于它便可得到 (1).

(2) $\dfrac{\partial^{n-1} G(x,t,\lambda)}{\partial x^{n-1}} = -\dfrac{\partial^{n-1} K(x,t)}{\partial x^{n-1}} - \displaystyle\int_{\delta_1} \dfrac{\partial^{n-1} G(x,\tau,\lambda)}{\partial x^{n-1}}(M_\tau - \lambda)J(\tau,t))\mathrm{d}\tau$. 后面的积分是 $x, t \in (a,b)$ 的连续函数, 所以 $\dfrac{\partial^{n-1} G(x,t,\lambda)}{\partial x^{n-1}}$ 与 $-\dfrac{\partial^{n-1} K(x,t)}{\partial x^{n-1}}$ 在 $x = t$ 处的间断一样, 等于 $-\dfrac{1}{p_n(t)}$.

(3) 在 $x, t \in (a,b), x \neq t, \mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 的每个紧集上, 因为

$$
\frac{\partial^j G_m}{\partial t^j} = -\frac{\partial^j K(x,t)}{\partial t^j} - \int_{\delta_1} G_m(x,\tau,\lambda) \frac{\partial^j}{\partial t^j}(M_\tau - \lambda)J(\tau,t)\mathrm{d}\tau, \quad j = 0,1,\cdots,n-1,
$$

右端一致收敛到

$$-\frac{\partial^j K(x,t)}{\partial t^j}-\int_{\delta_1} G(x,\tau,\lambda)\frac{\partial^j}{\partial t^j}(M_\tau-\lambda)J(\tau,t)\mathrm{d}\tau,$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^j G_m}{\partial t^j}=\frac{\partial^j G}{\partial t^j},\quad j=1,2,\cdots,n-1\text{一致成立}.$$

另外 $x\neq t$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n G_m}{\partial t^n}=&-\frac{\partial^n K(x,t)}{\partial t^n}\\&+\int_{\delta_1} G_m(x,\tau,\lambda)\frac{\partial^n}{\partial t^n}(\lambda J(\tau,t)-M_\tau J(\tau,t))\mathrm{d}\tau+(-1)^n\frac{\lambda G_m(x,t,\lambda)}{p_n(t)},\end{aligned}$$

右端一致收敛到

$$-\frac{\partial^n K(x,t)}{\partial t^n}+\int_{\delta_1} G(x,\tau,\lambda)\frac{\partial^n}{\partial t^n}(\lambda J(\tau,t)-M_\tau J(\tau,t))\mathrm{d}\tau+(-1)^n\frac{\lambda G(x,t,\lambda)}{p_n(t)},$$

故 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\partial^n G_m}{\partial t^n}=\dfrac{\partial^n G}{\partial t^n}$ 也一致成立. 类似地, 利用 (5) 的对称性, 在上述紧集上 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\partial^j G_m}{\partial x^j}=\dfrac{\partial^j G}{\partial x^j}, j=0,1,2,\cdots,n$ 一致成立. 可是当 $x\neq t$ 时, 作为 x 的函数

$$MG_m=\lambda G_m,$$

故 $x\neq t$ 时,

$$MG=\lambda G.$$

(4) 因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{j+k}G_m}{\partial x^j\partial t^k}=&-\frac{\partial^{j+k}K}{\partial x^j\partial t^k}\\&-\int_{\delta_1}\frac{\partial^j G_m(x,\tau,\lambda)}{\partial x^j}\frac{\partial^k}{\partial t^k}(M_\tau-\lambda)J(\tau,t))\mathrm{d}\tau,\quad j,k=0,1,\cdots,n-1,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{j+k}G}{\partial x^j\partial t^k}=&-\frac{\partial^{j+k}K}{\partial x^j\partial t^k}\\&-\int_{\delta_1}\frac{\partial^j G(x,\tau,\lambda)}{\partial x^j}\frac{\partial^k}{\partial t^k}(M_\tau-\lambda)J(\tau,t))\mathrm{d}\tau,\quad j,k=0,1,\cdots,n-1,\end{aligned}$$

所以由 (3) 的一致收敛性可得

$$\frac{\partial^{j+k}G_m}{\partial x^j\partial t^k}\to\frac{\partial^{j+k}G}{\partial x^j\partial t^k},\quad j,k=0,1,\cdots,n-1.$$

由于 $j,k \neq n-1$ 时, G_m 和 G 的导数保持连续, 所以上述收敛在 $x,t \in (a,b), \mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 的紧区域上是一致的. 当 j,k 中有一个是 $n-1$ 时, 收敛在 $x,t \in (a,b), x \neq t, \mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 的紧区域上一致.

(5) 由 G_m 的对称性即得 G 的对称性.

(6) 由

$$\|G_\delta(\cdot,t,\lambda)\|_\delta \leqslant \|J(\cdot,t)\|_{\delta_1} + \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|(M-\lambda)J(\cdot,t)\|_{\delta_1}, \quad t \in \delta_0$$

知存在着依赖于 δ_0 和 δ_1 的常数 C_1, 使得

$$\|G_\delta(\cdot,t,\lambda)\|_\delta \leqslant C_1 + \frac{C_1}{|\mathrm{Im}\lambda|}(|\lambda|+1), \quad t \in \delta_0.$$

当 $\widetilde{\delta} \subset \delta$ 时,

$$\|G_\delta(\cdot,t,\lambda)\|_{\widetilde{\delta}} \leqslant \|G_\delta(\cdot,t,\lambda)\|_\delta \leqslant C_1 + \frac{C_1}{|\mathrm{Im}\lambda|}(|\lambda|+1),$$

若固定 $\widetilde{\delta}$, 让 $\delta = \delta_m, m \to \infty$ 时, $\delta_m \to (a,b)$ 可得

$$\|G(\cdot,t,\lambda)\|_{\widetilde{\delta}} \leqslant C_1 + \frac{C_1}{|\mathrm{Im}\lambda|}(|\lambda|+1),$$

再让 $\widetilde{\delta} \to (a,b)$ 便得

$$G(\cdot,t,\lambda) \in L^2(a,b),$$

这里 t,λ 固定, $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$($t \in \delta_0$ 而 δ_0 是可变的). 同样,

$$G(x,\cdot,\lambda) \in L^2(a,b) \quad (x,\lambda \text{ 固定}, \mathrm{Im}\lambda \neq 0).$$

(7) 若 $f \in L^2(a,b)$, 则积分

$$\int_a^b G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in (a,b), \mathrm{Im}\lambda \neq 0$$

绝对收敛, 并且由于

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^{a+\varepsilon} + \int_{b-\varepsilon}^b\right)|G(x,t,\lambda)|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \\ \leqslant\ &\sqrt{\int_a^{a+\varepsilon}|G|^2\,\mathrm{d}t\int_a^{a+\varepsilon}|f|^2\,\mathrm{d}t} + \sqrt{\int_{b-\varepsilon}^b|G|^2\mathrm{d}t\int_{b-\varepsilon}^b|f|^2\mathrm{d}t},\end{aligned}$$

其中,

$$\left(\int_a^{a+\varepsilon} + \int_{b-\varepsilon}^b\right)|G(x,t,\lambda)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b|G(x,t,\lambda)|^2\,\mathrm{d}t,$$

右边是 x 的连续函数, 所以关于 x 是局部一致有界的. 这样积分的收敛关于 x 是局部一致的. 令

$$v(x)=\int_a^b G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,$$

利用

$$\frac{\partial G_\delta}{\partial t}(x,t,\lambda)=-\frac{\partial J(x,t)}{\partial t}-\int_{\delta_1}G_\delta(x,\tau,\lambda)\frac{\partial}{\partial t}(M_\tau-\lambda)J(\tau,t)\mathrm{d}\tau,$$

用引理的方法得

$$\left\|\frac{\partial G_\delta}{\partial t}(\cdot,t,\lambda)\right\|_\delta\leqslant\left\|\frac{\partial J(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{\delta_1}+\frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(M_\tau-\lambda)J(\tau,t)\right\|_{\delta_1}.$$

再重复 (6) 里的方法知 $\left\|\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,\cdot,\lambda)\right\|$ 当 $\mathrm{Im}\lambda\neq0$, λ 固定时, 关于 x 是局部一致有界的, 所以积分 $\displaystyle\int_a^b\frac{\partial G}{\partial x}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t$ 关于 x 局部一致收敛, 由逐项微分定理,

$$v'(x)=\int_a^b\frac{\partial G}{\partial x}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,$$

这个函数在 (a,b) 上连续. 类似地可得 $v'(x),\cdots,v^{(n-1)}$ 在 (a,b) 上都连续, $v^{(n-1)}(x)$ 可以写成它的导数的不定积分, 这个导数由于连续在有限区间上可积, 所以 $v^{(n-1)}(x)$ 是局部绝对连续的. 因为

$$v^{(n-1)}(x)=\int_a^b\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned}v^{(n)}(x)&=\int_a^b\frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t+\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x,x-0,\lambda)f(x)-\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x,x+0,\lambda)f(x)\\&=\int_a^b\frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t+f(x)\left[\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x+0,x,\lambda)-\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}(x-0,x,\lambda)\right]\\&=\frac{1}{p_n(x)}f(x)+\int_a^b\frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

于是

$$Mv=\int_a^b M_xG(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t+f(x)=\lambda v+f.$$

剩下来只要证明 $v\in L^2(a,b)$ 即可. 设 δ_0 是 (a,b) 的任一闭区间, 因为

$$\|G_\delta(\cdot,t,\lambda)\|_\delta\leqslant C_1+\frac{C_1}{|\mathrm{Im}\lambda|}(|\lambda|+1),\quad t\in\delta_0,$$

所以

$$\|G_\delta(x,\cdot,\lambda)\|_\delta \leqslant C_1 + \frac{C_1}{|\mathrm{Im}\lambda|}(|\lambda|+1), \quad x \in \delta_0.$$

由 (6) 也得到

$$\|G(x,\cdot,\lambda)\| \leqslant C_1 + \frac{C_1}{|\mathrm{Im}\lambda|}(|\lambda|+1), \quad x \in \delta_0,$$

取闭区间 $\varDelta \subset (a,b)$, 使得

$$\left(\int_{(a,b)\setminus\varDelta} |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

当 m 充分大时, $\varDelta \subset \delta_m$, 对 $x \in \delta_0$,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\delta_m} G_m(x,t,\lambda) f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b G(x,t,\lambda) f(t)\mathrm{d}t\right| \\
\leqslant &\left|\int_{\varDelta} \left(G_m(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda)\right) f(t)\mathrm{d}t\right| \\
&+ \left|\int_{(a,b)\setminus\varDelta} G(x,t,\lambda) f(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{\delta_m\setminus\varDelta} G_m(x,t,\lambda) f(t)\mathrm{d}t\right| \\
\leqslant &\int_{\varDelta} |G_m(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda)|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t + \|G(x,\cdot,\lambda)\| \\
&\|f\|_{(a,b)\setminus\varDelta} + \|G_m(x,\cdot,\lambda)\|_{\delta_m} \|f\|_{(a,b)\setminus\varDelta} \\
\leqslant &2\left(C_1 + \tfrac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}(|\lambda|+1)\right)\varepsilon + \int_{\varDelta} |G_m(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda)|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

利用 G_m 在 $x,t \in (a,b), \mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 的紧集上一致收敛到 G, 在 m 充分大时便有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\delta_m} G_m(x,t,\lambda) f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b G(x,t,\lambda) f(t)\mathrm{d}t\right| \\
\leqslant &\left[2\left(C_1 + \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}(|\lambda|+1)\right) + 1\right]\varepsilon, \quad x \in \delta_0,
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{m\to\infty} \left(G_{\delta_m}(\lambda) f\right)(x) = v(x) \text{ 对 } x \in \delta_0 \text{ 一致成立}.$$

可是

$$\|G_{\delta_m}(\lambda) f\|_{\delta_m} \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|f\|_{\delta_m} \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|f\|,$$

当 m 充分大时, $\delta_0 \subset \delta_m$, 故

$$\|G_{\delta_m}(\lambda) f\|_{\delta_0} \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|f\|, \quad m = 1, 2, \cdots,$$

取极限得

$$\|v\|_{\delta_0} \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|f\|,$$

所以

$$\|v\| \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|f\|.$$

并不就把 G 称为 Green 函数, 因为还没有考虑 G 的边条件. 下面将考虑两种情形, 它们在 $n=2$ 时对应了两种最重要的情形.

情形 5.3.1 设方程 $(M \pm \mathrm{i})y = 0$ 在 $\mathscr{D}$ 内没有非零解, 则对任何 $\lambda, \mathrm{Im}\lambda \neq 0$, $My = \lambda y$ 在 $\mathscr{D}$ 内仅有零解.

证明 设 $\lambda_0, \mathrm{Im}\lambda_0 > 0, My = \lambda_0 y$ 在 $\mathscr{D}$ 内只有零解. 对于 $|\lambda - \lambda_0| < \mathrm{Im}\lambda_0$, 如果 $v \in \mathscr{D}$ 是 $My = \lambda y$ 的解, 则令

$$u = v - (\lambda - \lambda_0)G(\lambda_0)v,$$

由定理 5.3.1, $G(\lambda_0)v \in \mathscr{D}$, 故 $u \in \mathscr{D}$, 而

$$(M - \lambda_0)u = (M - \lambda_0)v - (\lambda - \lambda_0)v = (M - \lambda)v = 0,$$

故 $u = 0$. 于是

$$\|v\| = |\lambda - \lambda_0|\,\|G(\lambda_0)v\| \leqslant \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\mathrm{Im}\lambda_0}\|v\| < \|v\|.$$

所以 $v = 0$.

定理 5.3.2 在情形 5.3.1 下, G 是唯一的,

$$\lim_{\delta \to (a,b)} G_\delta = G,$$

收敛在 $x, t \in (a,b), \mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 的任何紧集上是一致的, 并且与 δ 上的边界条件 U_δ 的选取无关. 这时称 G 为情形 5.3.1 的 Green 函数.

注 这种情形对应于 $T_0(M)$ 是自伴的, 亏指数为 $(0,0)$(极限点情形) .

证明 假若还有另一个 $\widetilde{G}$, 也具有定理 5.3.1 的那些性质, 则作为 x 的函数, $G - \widetilde{G}$ 在 $x = t$ 处的间断便消失了, 因而

$$(G - \widetilde{G})(\cdot, t, \lambda) \in C^n(a,b).$$

这样便有 $G - \widetilde{G} \in \mathscr{D}$ 且当 $x \neq t$ 时, 由于

$$M(G - \widetilde{G}) = \lambda(G - \widetilde{G}), \quad \mathrm{Im}\lambda \neq 0,$$

加上 $(G-\widetilde{G})\in C^n(a,b)$, 故等式在 (a,b) 上成立. 由前面的证明知 $G=\widetilde{G}$.

如果 $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$, 则 $-G(\lambda)=(\lambda I-T_1(M))^{-1}=R(\lambda,T_1(M))$, 这是一个 Carleman 型积分算子.

(1) $f\in L^2(a,b), G(\lambda)f\in\mathscr{D}$ 且 $(M-\lambda)G(\lambda)f=f$, 即

$$(\lambda I-T_1(M))(-G(\lambda))=I;$$

(2) $u\in\mathscr{D}$, 令 $f=(M-\lambda)u$, 则 $f\in L^2(a,b)$, 而 $G(\lambda)f\in D$, 所以有

$$\begin{aligned}&w=u-G(\lambda)f\in\mathscr{D},\\&(M-\lambda)w=(M-\lambda)u-(M-\lambda)G(\lambda)f=(M-\lambda)u-f=0,\end{aligned}$$

故 $w=0$, 即

$$u=G(\lambda)f=G(\lambda)(T_1(M)-\lambda I)u,\quad (-G(\lambda))(\lambda I-T_1(M))=I|_{\mathscr{D}},$$

$$\mathscr{D}\xrightarrow{\lambda I-T_1(M)}L^2(a,b)\xrightarrow{-G(\lambda)}\mathscr{D}.$$

情形 5.3.2 考虑区间 $[a,b)$, 令

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathscr{D}}=\{u\in L^2[a,b)|u\in C^{n-1}[a,b),u^{(n-1)}\in AC_{\mathrm{loc}}[a,b),Mu\in L^2[a,b),\\&U_j(u)=\sum_{k=1}^{n}M_{jk}u^{(k-1)}(a)=0,\quad j=1,\cdots,m,\quad \mathrm{rank}(M_{jk})=m\},\end{aligned}$$

把边界条件记成 $U^{(1)}u=0$.

假设 $T_1(M)$ 限制在 $\widehat{\mathscr{D}}$ 上是个自伴算子 T, 这表示 $T_0(M)$ 是极限点的 [22], 而 $n=2m$, 亏指数为 (m,m). $My=\pm\mathrm{i}y$ 在 $\widehat{\mathscr{D}}$ 里只有零解 (这是由于 T 自伴, $\pm\mathrm{i}\in\rho(T)$). 考虑闭子区间 $\delta=[a,\widetilde{b}]\subset[a,b)$, 增加 $n-m=m$ 个线性无关的边界条件

$$U_\delta^{(2)}u=0,$$

使得

$$\widehat{\mathscr{D}}_\delta=\left\{u\in\widehat{D}|U_\delta^{(2)}u=0\right\}$$

是 $T_0(M|_\delta)$ 的一个自伴延拓 T_δ. 以 G_δ 表示它的 Green 函数, 则引理 5.3.1 与定理 5.3.1 仍然成立, 由于每个 G_δ 都满足

$$U^{(1)}G_\delta=0,$$

所以极限 G(因为局部一致收敛) 也满足这个边界条件. $\forall f\in L^2[a,b),\mathrm{Im}\lambda\neq 0$,

$$v(x)=\int_a^b G(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t,$$

则 $v \in \widehat{\mathscr{D}}$. 同样可以证明

定理 5.3.3 在情形 5.3.2 下, G 是唯一的,

$$\lim_{\delta \to [a,b)} G_\delta = G,$$

收敛在 $x, t \in [a,b), \mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 的任何紧集上是一致的, 并且与 δ 上的边界条件 $U_\delta^{(2)}$ 的选取无关. 这时称 G 为情形 5.3.2 的 Green 函数.

$\mathrm{Im}\lambda \neq 0, -G(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = R(\lambda, T)$ 也是一个 Carleman 型积分算子.

可以用 Green 函数去表示谱矩阵. 先考虑正则的情形. 设 T_δ 是 $T_0(M|_\delta)$ 的自伴延拓,

$$\mathscr{D}(T_\delta) = \{u \in \mathscr{D}(T_1(M|_\delta)) | U_\delta u = 0\},$$

对应的 Green 函数是 $G_\delta(x,t,\lambda)$, 令

$$H_\delta(x,t,\lambda) = G_\delta(x,t,\lambda) - G_\delta(x,t,\overline{\lambda}).$$

定理 5.3.4 设 $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, 则

$$2\mathrm{i}\mathrm{Im}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho_{\delta jk}(\mu)}{|\mu - \lambda|^2} = \frac{\partial^{j+k-2} H_\delta}{\partial x^{j-1} \partial t^{k-1}}(c,c,\lambda), \quad j,k = 1,2,\cdots,n.$$

证明

(1) $(l-m)\int_\delta G_\delta(x,s,l) G_\delta(s,t,m)\mathrm{d}s = G_\delta(x,t,l) - G_\delta(x,t,m), \mathrm{Im}l, \mathrm{Im}m \neq 0.$

设 u 是

$$\begin{cases} (M-l)u = G_\delta(x,t,m), \\ U_\delta u = 0 \end{cases}$$

的解, 则

$$u(x) = \int_\delta G_\delta(x,s,l) G_\delta(s,t,m)\mathrm{d}s.$$

令

$$v = G_\delta(x,t,l) - G_\delta(x,t,m),$$

则 $v \in C^n(\delta), U_\delta v = 0$, 而

$$Mv = lG_\delta(x,t,l) - mG_\delta(x,t,m) = lv + (l-m)G_\delta(x,t,m),$$

即

$$(M-l)v = (l-m)G_\delta(x,t,m),$$

故 (逆算子存在)

$$v = (l-m)u,$$

这就是所求的公式. 在公式中取 $m=\bar{l}$ 代入即得

$$2\mathrm{iIm}l\int_\delta G_\delta(x,s,l)G_\delta(s,t,\bar{l})\mathrm{d}s=H_\delta(x,t,l).$$

(2) 由 $G_\delta(t,s,l)=\overline{G_\delta(s,t,\bar{l})}$ 可得

$$2\mathrm{iIm}l\int_\delta \frac{\partial^j G_\delta(x,s,l)}{\partial x^j}\frac{\partial^k \overline{G_\delta(t,s,l)}}{\partial t^k}\mathrm{d}s=\frac{\partial^{j+k}H_\delta(x,t,l)}{\partial x^j\partial t^k},\quad j,k=0,1,\cdots,n-1.$$

(3) 设 $\{\lambda_{\delta k}\}$ 和 $\{\varphi_{\delta k}\}$ 是 T_δ 的特征值和特征函数, 则

$$M\varphi_{\delta m}=l\varphi_{\delta m}+(\lambda_{\delta m}-l)\varphi_{\delta m},$$

故

$$\varphi_{\delta m}(x)=(\lambda_{\delta m}-l)\int_\delta G_\delta(x,s,l)\varphi_{\delta m}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\varphi_{\delta m}^{(k)}(x)=(\lambda_{\delta m}-l)\int_\delta \frac{\partial^k G_\delta}{\partial x^k}(x,s,l)\varphi_{\delta m}(s)\mathrm{d}s,\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

这表示 $\overline{\dfrac{\partial^k G_\delta(x,\cdot,l)}{\partial x^k}}$ 的 Fourier 系数是 $\dfrac{\overline{\varphi_{\delta m}^{(k)}(x)}}{\lambda_{\delta m}-\bar{l}}$, 因而由 Parseval 等式得

$$\begin{aligned}2\mathrm{iIm}l\int_\delta \frac{\partial^j G_\delta(x,s,l)}{\partial x^j}\overline{\frac{\partial^k G_\delta(t,s,l)}{\partial t^k}}\mathrm{d}s&=2\mathrm{iIm}l\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{\varphi_{\delta m}^{(k)}(t)}}{\lambda_{\delta m}-\bar{l}}\cdot\frac{\varphi_{\delta m}^{(j)}(x)}{\lambda_{\delta m}-l}\\&=2\mathrm{iIm}l\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi_{\delta m}^{(j)}(x)\overline{\varphi_{\delta m}^{(k)}(t)}}{|\lambda_{\delta m}-l|^2}\\&=\frac{\partial^{j+k}H_\delta(x,t,l)}{\partial x^j\partial t^k}.\end{aligned}$$

(4) 利用

$$\varphi_{\delta k}=\sum_{j=1}^{n}r_{\delta kj}\chi_j(x,\lambda_{\delta k})$$

得

$$2\mathrm{iIm}l\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p,q=1}^{n}\chi_p^{(j)}(x,\lambda_{\delta m})\overline{\chi_q^{(k)}(t,\lambda_{\delta m})}r_{\delta mp}\overline{r_{\delta mq}}\frac{1}{|\lambda_{\delta m}-l|^2}=\frac{\partial^{j+k}H_\delta(x,t,l)}{\partial x^j\partial t^k},$$

即

$$2\mathrm{iIm}l\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p,q=1}^{n}\chi_p^{(j)}(x,\lambda)\overline{\chi_q^{(k)}(t,\lambda)}\frac{1}{|\lambda-l|^2}\mathrm{d}\rho_{\delta pq}(\lambda)=\frac{\partial^{j+k}H_\delta(x,t,l)}{\partial x^j\partial t^k},$$

取 $x=t=c$, 则得

$$2\mathrm{i}\mathrm{Im}l\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_{\delta jk}(\lambda)}{|\lambda-l|^2}=\frac{\partial^{j+k-2}H_\delta(c,c,l)}{\partial x^{j-1}\partial t^{k-1}}.$$

以下记

$$\begin{aligned}
&G=\lim_{m\to\infty}G_m,\\
&H(x,t,l)=G(x,t,l)-G(x,t,\bar{l}),\\
&P_{\delta jk}(l)=\frac{\partial^{j+k-2}H_\delta(c,c,l)}{\partial x^{j-1}\partial t^{k-1}},\quad j,k=1,2,\cdots,n,\\
&P_{jk}(l)=\frac{\partial^{j+k-2}H(c,c,l)}{\partial x^{j-1}\partial t^{k-1}},\quad j,k=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}$$

定理 5.3.5 设 $\{G_m\}$ 是从 $\{G_\delta\}$ 中选取来的收敛子列, $\{\boldsymbol{\rho}_m\}=\{(\rho_{\delta mjk})\}$ 是对应于 δ_m 的谱矩阵, 则存在非降的 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{\rho}=(\rho_{jk})$, 每个 ρ_{jk} 在 λ 的有限区间上都是有界变差函数, 且

$$\lim_{m\to\infty}(\boldsymbol{\rho}_m(\mu)-\boldsymbol{\rho}_m(\lambda))=\boldsymbol{\rho}(\mu)-\boldsymbol{\rho}(\lambda)$$

对 $\boldsymbol{\rho}$ 的连续点 λ,μ 成立.

$$\rho_{jk}(\mu)-\rho_{jk}(\lambda)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{\varepsilon\to0+}\int_\lambda^\mu P_{jk}(\sigma+\mathrm{i}\varepsilon)\mathrm{d}\sigma.$$

注 定理 5.3.5 不仅又一次给出了谱矩阵的存在性证明, 并且通过公式对情形 5.3.1 和情形 5.3.2 证明了谱矩阵是唯一的.

证明 (1) $\boldsymbol{\rho}$ 的存在.

$$2\mathrm{i}\mathrm{Im}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_{\delta_m jk}(\mu)}{|\mu-\lambda|^2}=P_{\delta_m jk}(\lambda),$$

当 $\lambda=\mathrm{i}$ 时, 因为 $\rho_{\delta_m jj}$ 单调, 所以

$$\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{d}\rho_{\delta_m jj}(\mu)}{1+\mu^2}\leqslant\frac{P_{\delta_m jj}(\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}.$$

由于

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\partial^{j+k}G_m}{\partial x^j\partial t^k}=\frac{\partial^{j+k}G}{\partial x^j\partial t^k},$$

收敛在 $x,t\in(a,b),\mathrm{Im}\lambda\neq0$ 的紧集上一致, 所以

$$\lim_{m\to\infty}P_{\delta_m jj}(\lambda)=P_{jj}(\lambda),\quad j=1,2,\cdots,n.$$

在应用定理 5.3.1 的 4 时, 本来要对 $j=n$ 的情形特殊考虑, 可是 H_δ 是两个 G_δ 的差, 在 $x=t$ 处跃度消失了, 是连续的, 所以 $j=n$ 时也是没有问题的. 收敛在 $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ 的紧集 $\varLambda$ 上是一致的. 所以 $\dfrac{P_{\delta_m jj}(\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$ 关于 m 是一致有界的, 那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_{\delta_m jj}(\mu)}{1+\mu^2}<A,\quad j=1,\cdots,n,$$

$$\int_{-l}^{l}\mathrm{d}\rho_{\delta_m jj}(\mu)<A(1+l^2),\quad j=1,2,\cdots,n,$$

$$\rho_{\delta_m jj}(l)<A(1+l^2),\quad j=1,2,\cdots,n.$$

但是

$$|\rho_{\delta_m jk}(\varDelta)|^2\leqslant\rho_{\delta_m jj}(\varDelta)\rho_{\delta_m kk}(\varDelta),$$

因此 $\rho_{\delta_m jk}(x)$ 在有限区间上的全变差有界, 与 m 无关! 故由 Helly 选择定理, 存在 $\{\rho_m\}$ 的子列, 使得

$$\lim_{p\to\infty}\boldsymbol{\rho}_{m_p}=\boldsymbol{\rho},$$

$\boldsymbol{\rho}$ 当然也是非降的 Heimite 矩阵, 在每个有限区间上有界变差.

(2) 因为 $\displaystyle\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{d}\rho_{\delta_m jk}(\mu)}{1+\mu^2}\leqslant A$, 所以由 Helly 积分定理,

$$\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{d}\rho_{jk}(\mu)}{1+\mu^2}\leqslant A.$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_{jk}(\mu)}{1+\mu^2}\leqslant A,$$

如果 $\mathrm{Im}\lambda,\mathrm{Im}\lambda_0\neq 0$, 考虑

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{|\mu-\lambda|^2}-\frac{1}{|\mu-\lambda_0|^2}\right)\mathrm{d}\rho_{\delta_m jk}(\mu)=\frac{P_{\delta_m jk}(\lambda)}{2\mathrm{i}\mathrm{Im}\lambda}-\frac{P_{\delta_m jk}(\lambda_0)}{2\mathrm{i}\mathrm{Im}\lambda_0},$$

取极限 (用定理 3.7.2 的证明方法) 应有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{|\mu-\lambda|^2}-\frac{1}{|\mu-\lambda_0|^2}\right)\mathrm{d}\rho_{jk}(\mu)=\frac{P_{jk}(\lambda)}{2\mathrm{i}\mathrm{Im}\lambda}-\frac{P_{jk}(\lambda_0)}{2\mathrm{i}\mathrm{Im}\lambda_0},$$

故

$$\frac{P_{jk}(\lambda)}{2\mathrm{i}\mathrm{Im}\lambda}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho_{jk}(\mu)}{|\mu-\lambda|^2}=\mathrm{const.},\quad \mathrm{Im}\lambda\neq 0.$$

如果 λ,μ 是 $\rho_{jk}(\lambda)$ 的连续点, 由于收敛在 $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ 的紧集上是一致的, P_{jk} 解析,

积分 $\int_{\lambda}^{\mu} P_{jk}(\sigma+\mathrm{i}\varepsilon)\mathrm{d}\sigma$ 存在, 而

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\lambda}^{\mu} P_{jk}(\sigma+\mathrm{i}\varepsilon)\mathrm{d}\sigma = 2\mathrm{i}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\lambda}^{\mu}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon\mathrm{d}\rho_{jk}(\nu)}{(\nu-\sigma)^2+\varepsilon^2}\right)\mathrm{d}\sigma + 2\mathrm{i}\lim_{\varepsilon\to 0+}\mathrm{const.}\cdot\varepsilon.$$

由于被积函数是正的, 可以用 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\text{上式} &= 2\mathrm{i}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\lambda}^{\mu}\frac{\varepsilon\mathrm{d}\sigma}{(\nu-\sigma)^2+\varepsilon^2}\right)\mathrm{d}\rho_{jk}(\nu)\\ &= 2\mathrm{i}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\arctan\frac{\mu-\nu}{\varepsilon}-\arctan\frac{\lambda-\nu}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}\rho_{jk}(\nu).\end{aligned}$$

利用定理 3.7.2 的处理方法可得

$$\begin{aligned}\text{上式} &= 2\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\arctan\frac{\mu-\nu}{\varepsilon}-\arctan\frac{\lambda-\nu}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}\rho_{jk}(\nu)\\ &= 2\pi\mathrm{i}(\rho_{jk}(\mu)-\rho_{jk}(\lambda)),\end{aligned}$$

所以在 $\boldsymbol{\rho}$ 的连续点 λ,μ 处,

$$\lim_{m\to\infty}(\boldsymbol{\rho}_m(\mu)-\boldsymbol{\rho}_m(\lambda)) = \boldsymbol{\rho}(\mu)-\boldsymbol{\rho}(\lambda).$$

5.4 一类高阶对称微分算式极限点的 Kauffman 方法

对高阶正则对称微分算式的研究近年来取得了很大的发展, 建立了一些极限点 (limit–N) 和极限圆 (limit–2N) 的充分判别准则. 四阶情形有相当丰富的文献.

本节将介绍 R. M. Kauffman 的泛函分析方法, 他处理的是一类具有特定系数的正则对称微分算式

$$L \equiv \sum_{k=0}^{N}(-1)^k D^k p_k(x) D^k, \quad D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \quad x\in[1,\infty),$$

其中, $p_k(x)$ 是一些实幂的幂函数的线性组合

$$p_k(x) = c_k x^{n(k)} + \text{低阶项},$$

而 $c_k \geqslant 0$.

1968 年, W. N. Everitt 在研究四阶正定微分算式时提出了一个问题: 若

$$L \equiv \sum_{k=0}^{N}(-1)^k D^k p_k(x) D^k,$$

其中, $p_k \in C^\infty, p_k \geqslant 0, p_N > 0$, 是否 $Lf = 0$ 总是恰好有 N 个线性无关的平方可积解? 很多对四阶和六阶情形的研究工作都表明在某些条件下问题的答案是肯定的. R. M. Kauffman 利用他的方法证明了 $N = 2$ 时, 这类微分算式都是极限点的, 当 $N = 3$ 时, 他找到了反例并对 $N > 2$ 给出了这类微分算式的极限点类.

这一方法的关键是去计算 $L^+L = L^2$(计算 L^2 是机械的, 所以不管到手的微分算式, 这一步总是可以做的), 并证明其中"好"的项从某种意义上说可以最终胜过"坏"的项, 因而可以只考虑这些"好"的项组成的微分算子. 我们将首先给出"最终胜过"的定义, 然后给出一些重要的估计式, 并利用这些估计式证明所考虑的这类微分算式 L, 其平方中的"好"的项最终胜过"坏"的项.

定义 5.4.1 $[1,\infty)$ 上的正则微分算式 L 称为是正的, 记为 $L > 0$, 如果存在 $z > 1$, 使得对任何不恒为零的 $f \in C_0^\infty(z,\infty)$ 都有 $(Lf, f) > 0$, 这里 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2[1,\infty)$ 中的内积. 两个正则的微分算式 L 和 M, 如果 $L - M > 0$, 则称 L 大于 M, 记为 $L > M$.

定义 5.4.2 设 L 和 M 是 $[1,\infty)$ 上的两个正则微分算式, 其中, L 是正的, 如果对任何一个 $C_0^\infty(1,\infty)$ 里的序列 $\{f_n\}$, 满足 f_n 不恒为零且 $\mathrm{supp} f_n \subset (n,\infty)$, 都有极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(Mf_n, f_n)}{(Lf_n, f_n)} = 0,$$

则称 L 最终胜过 M , 记为 $L >> M$.

为了得到一些基本的估计式, 下面将介绍另一个微分算子理论中重要的概念, 叙述某些结论, 但不作过细的讨论, 感兴趣的读者可参阅列出的有关文献.

定义 5.4.3 $[1,\infty)$ 上的 N 阶正则微分算式 $L = \sum_{k=0}^{N} p_k(x) D^k$ 称为是 disconjugate 的, 如果它的任何非零解在 $[1,\infty)$ 上的零点个数 (零点的重数计算在内) 不超过 N.

例如, D^N 在 $[1,\infty)$ 上是 disconjugate 的, 因为它的非零解是阶数不超过 $N-1$ 的多项式.

引理 5.4.1 一阶正则微分算式是 disconjugate 的.

证明 设 $L \equiv p_1(x)D + p_0(x)$, 如果它的解 y 有一个零点, 则由存在唯一性定理 y 恒等于零, 所以是 disconjugate 的.

引理 5.4.2 如果 N 阶正则微分算式 L 可以表示成一阶正则微分算式的乘积, 则 L 是 disconjugate 的.

证明 对 N 用归纳法. $N = 1$ 时命题成立. 假设 $N - 1$ 时命题成立, 下面证明命题对 N 也成立. 设 $L = PQ$, 其中, Q 是个一阶正则微分算式的乘积 $Q = Q_1 \cdots Q_{N-1}$. 设 y 是 L 的非零解, y 有 N 个零点. 如果 α, β 是 y 的相邻的两

个零点, 不妨设 $Dy(\alpha)>0, Dy(\beta)<0$, 则由 $Q_{N-1}y(\alpha)$ 与 $Q_{N-1}y(\beta)$ 异号, 在 α 与 β 之间必有 $Q_{N-1}y$ 的一个零点. 如果 α 是 y 的二阶零点, 则由 $Dy(\alpha)=0$ 知 α 是 $Q_{N-1}y$ 的零点. 类似地, 当 α 是 y 的 m 阶零点时, α 必是 $Q_{N-1}y$ 的 $m-1$ 阶零点. 因此当 y 有 N 个零点时, $Q_{N-1}y$ 必有 $N-1$ 个零点. 这样便得到 Qy 有一个零点. 如果 Qy 恒等于零, y 便是 $Qz=0$ 的一个非零解, 与归纳法假定矛盾. 如果 Qy 不恒等于零, 则 Qy 是一阶方程 $Pz=0$ 的一个非零解, 又与一阶正则微分算式的 disconjugate 性质矛盾. 所以 y 的零点个数小于 N, L 是 disconjugate 的.

下面叙述两条结论, 只指明出处, 不作详细论证.

引理 5.4.3(Coppel) 设 $L\equiv\sum_{k=0}^{N}(-1)^kD^kp_k(x)D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上的正则微分算式, 其中, $p_k\in C^\infty, p_N>0$. 如果 L 是 disconjugate 的, 则对任何 $(1,\infty)$ 的紧子区间 I, 都存在 N 阶的线性微分算式 M, 使得在 I 上 $L=M^+M$.

证明 请参看 W. A. Coppel, *Disconjugacy*, Lecture Notes in Math., No. 220,1971, p.77 上的定义, p.80 定理 19 与 p.82 命题 3.

推论 5.4.1 设 $L\equiv\sum_{k=0}^{N}(-1)^kD^kp_k(x)D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上的正则微分算式, 其中, $p_k\in C^\infty, p_N>0$. 如果 L 是 disconjugate 的, 则 L 是正的.

证明 对任何不恒为零的 $f\in C_0^\infty(1,\infty)$, 在含 supp$f$ 的紧子区间上, 通过分部积分便可得

$$(Lf,f)=(M^+Mf,f)=\|Mf\|^2>0.$$

引理 5.4.4(Zettl) 设 $L\equiv\sum_{k=0}^{N}D^kp_k(x)D^k$, 系数光滑, $1\leqslant m\leqslant N$, 则存在微分算式 $Q\equiv\sum_{k=0}^{m}q_k(x)D^k, q_k\in C^k$ 使得 $L=PQ$ 的充分必要条件是存在 $Ly=0$ 的 m 个解 $y_1,\cdots,y_m$ 使 Wronski 行列式 $W(y_1,\cdots,y_m)\neq0$.

证明 请参看 Trans. Amer. Math. Soc. 197(1974), 341-353.

引理 5.4.5 存在某个正数 ε, 使得

$$((-1)^kD^kx^nD^k)^2>\varepsilon D^{2k}x^{2n}D^{2k}.$$

证明 记 $L\equiv((-1)^kD^kx^nD^k)^2-\varepsilon D^{2k}x^{2n}D^{2k}=D^k(x^nD^{2k}x^n-\varepsilon D^kx^{2n}D^k)D^k$, 由推论 5.4.1 与引理 5.4.2, 只要证明存在正数 ε 使得 $M\equiv x^nD^{2k}x^n-\varepsilon D^kx^{2n}D^k$ 可以表示成一阶正则微分算式的乘积. 考虑 $My=0$ 的幂函数解, 由 $Mx^\lambda=0$ 可得 λ 是某个 $2k$ 阶多项式 $P_\varepsilon(\lambda)$ 的根. 当 $\varepsilon=0$ 时, 由 $x^nD^{2k}x^nx^\lambda=0$, 对应的多项式 $P_0(\lambda)$ 有 $2k$ 个不同的实根. 因为多项式的根连续依赖于它的系数, 所以当 ε 充分小时, $P_\varepsilon(\lambda)$ 也有 $2k$ 个不同的实根. 于是当 ε 充分小时, 方程 $Mx^\lambda=0$ 有 $2k$ 个

不同的实幂的幂函数解张成它的解空间. 任取其中 $2k-1$ 个, 其 Wronski 行列式乃是一个实幂的多项式, 所以必存在一个数 a, 使得这个 Wronski 行列式在 $[a,\infty)$ 上不为零, 这样由 Zettl 的定理, M 便可以分解成 PQ 的形式, 其中, P 是一阶的正则微分算式. 由于 $Qy=0$ 的解一定适合方程 $My=0$, 所以它也有 $2k-1$ 个不同的实幂的幂函数解组成解空间, 这样 Q 便可以继续分解, 如此便能把 M 分解为一阶正则微分算式的乘积. 引理证毕.

引理 5.4.6 若 $(m-1)^2>4\varepsilon$, 则 $-Dx^mD-\varepsilon x^{m-2}$ 在 $[1,\infty)$ 上是 disconjugate 的.

证明 只要证明 $-Dx^mD-\varepsilon x^{m-2}$ 可以表示成两个一阶微分算式的乘积. 为此, 需要证明它有两个不同的实解. 考虑方程

$$(-Dx^mD-\varepsilon x^{m-2})x^\lambda=0,$$

得

$$-\lambda(\lambda+m-1)-\varepsilon=0,$$

即

$$\lambda^2+(m-1)\lambda+\varepsilon=0,$$

当 $(m-1)^2>4\varepsilon$ 时, 微分方程有两个不同的实幂幂函数解, 故 $-Dx^mD-\varepsilon x^{m-2}$ 在 $[1,\infty)$ 上是 disconjugate 的.

引理 5.4.7 设 l 是自然数, $1\leqslant l\leqslant k$, m 是实数, 如果对任何非负整数 $r, 0\leqslant r<l$ 都有 $m\neq 2r+1$, 则存在某个正数 ε, 使得

$$(-1)^kD^kx^mD^k>\varepsilon(-1)^{k-l}D^{k-l}x^{m-2l}D^{k-l}.$$

证明 对 l 用归纳法. 当 $l=1$ 时, 由假定 $m\neq 1$, 于是

$$(-1)^kD^kx^mD^k-\varepsilon(-1)^{k-1}D^{k-1}x^{m-2}D^{k-1}=(-1)^{k-1}D^{k-1}(-Dx^mD-\varepsilon x^{m-2})D^{k-1},$$

因为 $(m-1)^2>0$, 故可取到 $\varepsilon>0$ 使得 $(m-1)^2>4\varepsilon$, 由引理 5.4.6, $-Dx^mD-\varepsilon x^{m-2}$ 在 $[1,\infty)$ 上是 disconjugate 的, 因此 $(-1)^kD^kx^mD^k-\varepsilon(-1)^{k-1}D^{k-1}x^{m-2}D^{k-1}$ 也是 disconjugate 的. 利用 Coppel 定理便有

$$(-1)^kD^kx^mD^k>\varepsilon(-1)^{k-1}D^{k-1}x^{m-2}D^{k-1},$$

命题对 $l=1$ 成立. 假定命题对 $l=n<k$ 都成立, 下面证明命题对 $l=n+1$ 也成立. 考虑

$$\begin{aligned}&(-1)^{k-n}D^{k-n}x^{m-2n}D^{k-n}-\varepsilon_1(-1)^{k-n-1}x^{m-2n-2}D^{k-n-1}\\&=(-1)^{k-n-1}D^{k-n-1}(-Dx^{m-2n}D-\varepsilon_1x^{m-2n-2})D^{k-n-1},\end{aligned}$$

由引理 5.4.7 假定, 对任何非负整数 $r, 0 \leqslant r < n+1$, 都有 $m \neq 2r+1$, 因此 $m-2n \neq 1$. 所以当 $4\varepsilon_1 < (m-2n-1)^2$ 时, $-Dx^{m-2n}D - \varepsilon_1 x^{m-2n-2}$ 在 $[1,\infty)$ 上是 disconjugate 的. 于是 $(-1)^{k-n}D^{k-n}x^{m-2n}D^{k-n} - \varepsilon_1(-1)^{k-n-1}D^{k-n-1}x^{m-2n-2}D^{k-n-1}$ 也是 disconjugate 的. 由 Coppel 定理,

$$(-1)^{k-n}D^{k-n}x^{m-2n}D^{k-n} > \varepsilon_1(-1)^{k-n-1}D^{k-n-1}x^{m-2n-2}D^{k-n-1},$$

可是根据归纳法假设, 存在 $\varepsilon > 0$ 使

$$(-1)^k D^k x^m D^k > \varepsilon(-1)^{k-n}D^{k-n}x^{m-2n}D^{k-n},$$

故

$$(-1)^k D^k x^m D^k > \varepsilon\varepsilon_1(-1)^{k-n-1}D^{k-n-1}x^{m-2n-2}D^{k-n-1},$$

归纳法步骤完成. 引理 5.4.7 得证.

引理 5.4.8 设 $\varepsilon > 0$, α 是实数, k 是非负整数, 则

$$(-1)^k D^k x^\alpha D^k \gg (-1)^k D^k x^{\alpha-\varepsilon} D^k.$$

证明 因为当 $f \in C_0^\infty(1,\infty)$ 且 $\mathrm{supp} f \subset (n,\infty)$ 时,

$$\frac{((-1)^k D^k x^{\alpha-\varepsilon} D^k f, f)}{((-1)^k D^k x^\alpha D^k f, f)} = \frac{\displaystyle\int_n^\infty x^{\alpha-\varepsilon}|D^k f|^2 \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_n^\infty x^\alpha |D^k f|^2 \mathrm{d}x} \leqslant \frac{\dfrac{1}{n^\varepsilon}\|x^{\frac{\alpha}{2}}D^k f\|^2}{\|x^{\frac{\alpha}{2}}D^k f\|^2} = \frac{1}{n^\varepsilon},$$

故得.

引理 5.4.9 设 (1) k, j 是非负整数, $k > j$;

(2) α, β 是实数, $\alpha - 2k < \beta - 2j$;

(3) l 是一个正整数, $l \leqslant k+j$, 并且对任何非负整数 $r, 0 \leqslant r < l-1$, 都有 $\alpha + \beta \neq 2r+1$;

则

$$D^{2j}x^{2\beta}D^{2j} + (-1)^{k+j}D^{k+j}x^{\alpha+\beta}D^{k+j} \gg D^{k+j-l}x^{\alpha+\beta-2l}D^{k+j-l}.$$

证明 分 3 种情形讨论.

(1) 当 $l = k-j$ 时, 估计式由引理 5.4.8 可得. 因为 $\alpha+\beta-2l = \alpha-2k+\beta+2j < 2\beta$.

(2) 当 $l > k-j$ 时, 记 $l = k-j+m$, 则 $m \geqslant 1$ 而 $k+j-l = 2j-m$. 取 $\varepsilon > 0$ 使得 $\alpha+\beta+\varepsilon$ 是无理数且 $\alpha+\varepsilon-2k < \beta-2j$. 因为 $\alpha+\beta+\varepsilon-2(k-j) < 2\beta$, 所以由引理 5.4.8 得

$$D^{2j}x^{2\beta}D^{2j} \gg D^{2j}x^{\alpha+\beta+\varepsilon-2(k-j)}D^{2j}.$$

而 $\alpha+\beta+\varepsilon$ 是无理数, 利用引理 5.4.7, 存在正数 δ, 使得

$$D^{2j}x^{\alpha+\beta+\varepsilon-2(k-j)}D^{2j}>\delta(-1)^{2j-m}D^{2j-m}x^{\alpha+\beta+\varepsilon-2(k-j)-2m}D^{2j-m},$$

于是

$$\begin{aligned}D^{2j}x^{2\beta}D^{2j}&\gg(-1)^{2j-m}D^{2j-m}x^{\alpha+\beta+\varepsilon-2(k-j+m)}D^{2j-m}\\&=(-1)^{k+j-l}D^{k+j-l}x^{\alpha+\beta+\varepsilon-2l}D^{k+j-l},\end{aligned}$$

故最后得所要的估计式.

(3) 当 $l<k-j$ 时, 证明是对 l 用归纳法. 假设 $l\geqslant n$ 时命题都成立, 现证明 $l=n-1\geqslant 1$ 时命题也成立. 这时

$$\begin{aligned}D^{k+j-n+1}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+1}&=D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+2}\\&\quad+aD^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+1}D^{k+j-n+1}\\&=D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+2}+aHD,\end{aligned}$$

这里 $a=\alpha+\beta-2n+2, H=D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+1}D^{k+j-n}$. 先看第 1 项, 对任何 $f\in C_0^\infty(1,\infty)$, 用分部积分与 Schwarz 不等式可得

$$|(D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+2}f,f)|\leqslant\|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-n}D^{k+j-n}f\|\|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-n+2}D^{k+j-n+2}f\|,$$

其中,

$$\|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-n}D^{k+j-n}f\|^2=((-1)^{k+j-n}D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n}D^{k+j-n}f,f),$$

而

$$\|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-n+2}D^{k+j-n+2}f\|^2=((-1)^{k+j-n+2}D^{k+j-n+2}x^{\alpha+\beta-2n+4}D^{k+j-n+2}f,f),$$

由条件 (3), 利用引理 5.4.7, 存在 $\dfrac{1}{C}>0$, 使得

$$(-1)^{k+j}D^{k+j}x^{\alpha+\beta}D^{k+j}>\frac{1}{C}(-1)^{k+j-n+2}D^{k+j-n+2}x^{\alpha+\beta-2n+4}D^{k+j-n+2},$$

于是

$$\|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-n+2}D^{k+j-n+2}f\|^2<C\|x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}D^{k+j}f\|^2,$$

这样对任何序列 $\{f_n\}\subset C_0^\infty(1,\infty)$, f_n 不恒为零, $\mathrm{supp}f_n\subset(n,\infty)$ 由归纳假设便有

$$\begin{aligned}&\frac{|(D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+2}f_n,f_n)|}{(D^{2j}x^{2\beta}D^{2j}f_n,f_n)+((-1)^{k+j}D^{k+j}x^{\alpha+\beta}D^{k+j}f_n,f_n)}\\&\leqslant\left[\frac{C((-1)^{k+j-n}D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n}D^{k+j-n}f_n,f_n)}{(D^{2j}x^{2\beta}D^{2j}f_n,f_n)+((-1)^{k+j}D^{k+j}x^{\alpha+\beta}D^{k+j}f_n,f_n)}\right]^{\frac12}\\&\to0\quad n\to\infty,\end{aligned}$$

即

$$D^{2j}x^{2\beta}D^{2j}+(-1)^{k+j}D^{k+j}x^{\alpha+\beta}D^{k+j}\gg D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+2}.$$

再考虑第 2 项, 因为

$$(HDf_n,f_n)=\overline{(f_n,HDf_n)}=\overline{(-DHf_n,f_n)},$$

所以

$$((HD-DH)f_n,f_n)=2\mathrm{Re}(HDf_n,f_n),$$

而

$$\begin{aligned}HD-DH&=D^{k+j-n}(x^{\alpha+\beta-2n+1}D-Dx^{\alpha+\beta-2n+1})D^{k+j-n}\\&=-(\alpha+\beta-2n+1)D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n}D^{k+j-n},\end{aligned}$$

由归纳法假定

$$D^{2j}x^{2\beta}D^{2j}+(-1)^{k+j}D^{k+j}x^{\alpha+\beta}D^{k+j}\gg HD-DH.$$

这样, 对任何 $C_0^\infty(1,\infty)$ 的序列 $\{f_n\}$, f_n 不恒为零, $\mathrm{supp}f_n\subset(n.\infty)$. 由于

$$(D^{k+j-n+1}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+1}f_n,f_n)$$

总是实的, 所以有

$$\begin{aligned}&|(D^{k+j-n+1}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+1}f_n,f_n)|\\=&|\mathrm{Re}(D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+2}f_n,f_n)+a\mathrm{Re}(HDf_n,f_n)|\\\leqslant&|(D^{k+j-n}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+2}f_n,f_n)|+\left|\frac{a}{2}\right|\Big|((HD-DH)f_n,f_n)\Big|.\end{aligned}$$

于是最后得到

$$D^{2j}x^{2\beta}D^{2j}+(-1)^{k+j}D^{k+j}x^{\alpha+\beta}D^{k+j}>>D^{k+j-n+1}x^{\alpha+\beta-2n+2}D^{k+j-n+1}.$$

归纳法步骤完成, $l<k-j$ 时估计式也成立. 引理证毕.

定理 5.4.1 设 $L\equiv\sum\limits_{k=0}^{N}(-1)^kc_kD^kx^{n(k)}D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上满足下列条件的正则微分算式:

(1) $c_k\geqslant 0$;

(2) 当 $k>j$ 时, $n(k)-2k<n(j)-2j$,

则 $L^2-R>>R$, 其中,

$$R=L^2-\left[\sum_{k=0}^{N}c_k^2(D^kx^{n(k)}D^k)^2+\sum_{k\neq j}(-1)^{k+j}c_kc_jD^{k+j}x^{n(k)+n(j)}D^{k+j}\right].$$

注 这里方括号里的那些项是 L^2 中的"好"的项, 而 R 则是 L^2 中"坏"的项的和.

证明 显然

$$L^2=\sum_{k=0}^{N}c_k^2(D^kx^{n(k)}D^k)^2+\sum_{k\neq j}c_kc_j[(-1)^kD^kx^{n(k)}D^k][(-1)^jD^jx^{n(j)}D^j]$$

由于 $[(-1)^kD^kx^{n(k)}D^k][(-1)^jD^jx^{n(j)}D^j]+[(-1)^jD^jx^{n(j)}D^j][(-1)^kD^kx^{n(k)}D^k]$ 是对称的微分算式, 所以可以写成

$$\sum_{r=0}^{k+j}(-1)^rD^rf_rD^r,$$

其中, $f_r=a_rx^{n(k)+n(j)-2(k+j-r)}$, 而 $a_{k+j}=1$. 于是

$$\begin{aligned}&c_kc_j\{[(-1)^kD^kx^{n(k)}D^k][(-1)^jD^jx^{n(j)}D^j]\\&+[(-1)^jD^jx^{n(j)}D^j][(-1)^kD^kx^{n(k)}D^k]\}\\=&(-1)^{k+j}c_kc_jD^{k+j}x^{n(k)+n(j)}D^{k+j}+c_kc_j\sum_{r=0}^{k+j-1}(-1)^ra_rD^rx^{n(k)+n(j)-2(k+j-r)}D^r.\end{aligned}$$

如果 $n(k)+n(j)-2(k+j-r)=1$, 即 $n(k)+n(j)=2(k+j-r)+1$, 则 $a_{r-1}=0$, 因为当这一项作用在函数上时, 对函数所求得最高阶导数是 $2(r-1)$, 因此必须还要对系数 $x^{n(k)+n(j)}$ 求 $2(k+j)-2(r-1)=2(k+j-r)+2$ 阶导数, 可是

$$n(k)+n(j)=2(k+j-r)+1<2(k+j-r)+2,$$

所以这一项不会出现. 这样当 $a_r\neq 0$ 时, 对一切 $s>r$, 必然有

$$n(k)+n(j)\neq 2(k+j-s)+1.$$

于是当 $a_r\neq 0$ 时, 在引理 5.4.9 中, 若 $k>j$, 取 $\alpha=n(k),\beta=n(j),l=k+j-r$, 因为对任何非负整数 n, $0\leqslant n<l-1=k+j-r-1$, 把 n 写成 $k+j-s$, 则 $s>r$, 应有

$$\alpha+\beta=n(k)+n(j)\neq 2(k+j-s)+1=2n+1,$$

所以由引理 5.4.9 可得

$$\begin{aligned}D^{2j}x^{2n(j)}D^{2j}+(-1)^{k+j}D^{k+j}x^{n(k)+n(j)}D^{k+j}\gg& D^{k+j-l}x^{n(k)+n(j)-2l}D^{k+j-l}\\=&D^rx^{n(k)+n(j)-2(k+j-r)}D^r.\end{aligned}$$

注意到对某个正数 ε 有

$$(D^j x^{n(j)} D^j)^2 > \varepsilon D^{2j} x^{2n(j)} D^{2j}.$$

故最后可得

$$L^2 - R \gg R.$$

定理证毕.

定义 5.4.4 设 $L \equiv \sum_{k=0}^{N} p_k(x) D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上的正则微分算式, 如果对任何的 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$ (或 $\mathscr{D}(T_1(L))$), 都有

$$p_k^{(j)} D^{k-j} f \in L^2[1,\infty), \quad j = 0,1,\cdots,k; k = 0,1,\cdots,N,$$

则称 $T_0(L)$(或 $T_1(L)$) 是分离的.

引理 5.4.10 设 L 和 M 都是 $[1,\infty)$ 上的正则微分算式, M 的阶数 $\leqslant L$ 的阶数. 如果存在某个 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$, 使得 $Mf \notin L^2[1,\infty)$, 则必存在 $C_0^\infty(1,\infty)$ 的序列 $\{f_n\}$, f_n 不恒为零, $\operatorname{supp} f_n \subset (n,\infty)$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(L^+ L f_n, f_n)}{(M^+ M f_n, f_n)} = 0.$$

证明 如果存在常数 K, 使得

$$\|Mg\| \leqslant K(\|g\| + \|Lg\|), \quad g \in C_0^\infty(1,\infty),$$

则对任何 $h \in \mathscr{D}(T_0(L))$, 由于有 $\{g_n\} \subset C_0^\infty(1,\infty)$ 使得在 $L^2[1,\infty)$ 中 $\lim\limits_{n\to 0} g_n = h$, $\lim\limits_{n\to\infty} L g_n = Lh$, 故 $\{Mg_n\}$ 是 Cauchy 列, 根据 $T_0(M)$ 的定义乃得 $h \in \mathscr{D}(T_0(\mathrm{M}))$, 这样便有 $\mathscr{D}(T_0(L)) \subset \mathscr{D}(T_0(M))$, 与假设不符. 因此必存在 $\{g_n\} \subset C_0^\infty$, 使得

$$\|Mg_n\| > n(\|g_n\| + \|Lg_n\|).$$

令 $h_n = g_n/(\|g_n\| + \|Lg_n\|)$, 则得一序列 $\{h_n\} \subset C_0^\infty(1,\infty)$, 使得 $\{\|h_n\|\}, \{\|Lh_n\|\}$ 都有界, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \|Mh_n\| = \infty$, 取 $\psi \in C^\infty$ 使 ψ 在一个紧区间外都等于 1, 于是 $1-\psi$ 有紧支集. 考虑 $C_0^\infty(1,\infty)$ 里的序列 $\{\psi h_n\}$, 显然 $\{\|\psi h_n\|\}$ 有界. 另外由于 h_n 是初值问题

$$\begin{cases} Ly = Lh_n, \\ D^k h_n(1) = 0, \quad k = 0,1,\cdots,N-1 \end{cases}$$

的解, 其中, N 是 L 的阶数. 利用常数变易法可得

$$\begin{pmatrix} h_n(x) \\ Dh_n(x) \\ \vdots \\ D^{N-1}h_n(x) \end{pmatrix} = \int_1^x \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ Lh_n(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t,$$

其中,

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{(}x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_N(x) \\ D\varphi_1(x) & D\varphi_2(x) & \cdots & D\varphi_N(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^{N-1}\varphi_1(x) & D^{N-1}\varphi_2(x) & \cdots & D^{N-1}\varphi_N(x) \end{pmatrix}$$

是对应于方程 $Ly = 0$ 的一个基本解组 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_N(x)$ 的 Wronski 矩阵. 于是

$$|D^k h_n(x)| = \left| \int_1^x \frac{\sum_{j=1}^N \varphi_j^{(k-1)}(x) W_j(\varphi_1, \cdots, \varphi_N)(t)}{W(\varphi_1, \cdots, \varphi_N)(t)} Lh_n(t)\mathrm{d}t \right|,$$

$W_j(\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$ 是以 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ 换 Wronski 行列式 $W(\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$ 中第 j 列得到的行列式. 因此在 $\mathrm{supp}(1-\psi)$ 上有

$$|D^k h_n(x)| \leqslant A \int_1^b |Lh_n(t)|\mathrm{d}t \leqslant A\sqrt{b-1}\|Lh_n\|, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1,$$

这里 b 使得 $\mathrm{supp}(1-\psi) \subset [1, b]$. 于是

$$\{D^k h_n(x) | k = 0, 1, \cdots, N-1, n = 1, 2, \cdots, x \in \mathrm{supp}(1-\psi)\}$$

是有界的. 这样注意到

$$L(1-\psi)h_n = \sum_{k=0}^N p_k D^k((1-\psi)Lh_n) = (1-\psi)Lh_n + \sum_{k=1}^N p_k \sum_{j=1}^k \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} D^{k-j}h_n D^j(1-\psi),$$

便可得 $\{\|L(1-\psi)h_n\|\}$ 与 $\{\|M(1-\psi)h_n\|\}$ 都是有界的. 于是 $\{\|L(\psi h_n)\|\}$ 是有界的, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \|M(\psi h_n)\| = \infty$, 即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(L^+L(\psi h_n), \psi h_n)}{(M^+M(\psi h_n), \psi h_n)} = 0.$$

剩下的只要取一串上述形状的 $\{\psi_m\}$, 使得 $\mathrm{supp}\psi_m \subset (m,\infty)$, 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(L^+L(\psi_m h_n),\psi_m h_n)}{(M^+M(\psi_m h_n),\psi_m h_n)}=0,\quad m=1,2,\cdots,$$

所以可以取到 n_m, 使得

$$\left|\frac{(L^+L(\psi_m h_{n_m}),\psi_m h_{n_m})}{(M^+M(\psi_m h_{n_m}),\psi_m h_{n_m})}\right|<\frac{1}{2^m},\quad m=1,2,\cdots.$$

令 $f_m=\psi_m h_{n_m}$, 则 $f_m\in C^\infty, \mathrm{supp}f_m\subset(m,\infty)$ 且

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(L^+Lf_m,f_m)}{(M^+Mf_m,f_m)}=0.$$

证毕.

定理 5.4.2　设 $L\equiv\sum_{k=0}^{N}(-1)^k c_k D^k x^{n(k)}D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上满足

(1) $c_k\geqslant 0$;

(2) 当 $k>j$ 时, $n(k)-2k<n(j)-2j$;

的正则微分算式, 则 $T_0(L)$ 是分离的.

证明　(1) 先证明对一切 $0\leqslant k\leqslant N, c_k>0$ 都有

$$x^{n(k)}D^{2k}f\in L^2[1,\infty),\quad f\in\mathscr{D}(T_0(L)).$$

记 $M=x^{n(k)}D^{2k}$. 如果存在 $f\in\mathscr{D}(T_0(L))$, 使得 $Mf\overline{\in}L^2[1,\infty)$, 则由引理 5.4.10, 必存在 $C_0^\infty(1,\infty)$ 的序列 $\{f_n\}, \mathrm{supp}f_n\subset(n,\infty)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(L^2f_n,f_n)}{(M^+Mf_n,f_n)}=0.$$

由于 $L^2-R>>R$, 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(Rf_n,f_n)}{((L^2-R)f_n,f_n)}=0,$$

于是当 n 充分大时,

$$|(Rf_n,f_n)|\leqslant\frac{1}{2}|((L^2-R)f_n,f_n)|,$$

这样由

$$|(L^2f_n,f_n)|\geqslant|((L^2-R)f_n,f_n)|-|(Rf_n,f_n)|\geqslant\frac{1}{2}|((L^2-R)f_n,f_n)|$$

便可推出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{((L^2-R)f_n,f_n)}{(M^+Mf_n,f_n)}=0.$$

可是对某个正数 $\varepsilon, (D^k x^{n(k)} D^k)^2 > \varepsilon D^{2k} x^{2n(k)} D^{2k} = \varepsilon M^+ M$, 当 n 充分大时, 应有

$$\frac{((L^2 - R)f_n, f_n)}{(M^+ M f_n, f_n)} > \varepsilon > 0.$$

因而导致矛盾. 故对一切 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$ 均有 $x^{n(k)} D^{2k} f \in L^2[1, \infty)$.

(2) 剩下再证明对一切 $0 \leqslant k \leqslant N, c_k > 0$, 当 $1 \leqslant j \leqslant 2k$ 时都有

$$x^{n(k)-j} D^{2k-j} f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathscr{D} T_0(L).$$

分以下两种情况来证:

(i) 若 j 具有下述性质: 任何非负整数 $t, 0 \leqslant t < j$ 都满足 $2n(k) \neq 2t + 1$, 这种情形可以用 (1) 的方法去证, 因为由引理 5.4.5 和引理 5.4.7, 对某个正数 ε 有

$$(D^k x^{n(k)} D^k)^2 > \varepsilon (-1)^{2k-j} D^{2k-j} x^{2n(k)-2j} D^{2k-j}.$$

(ii) 若存在某个非负整数 $t, 0 \leqslant t < j$ 使得 $2n(k) = 2t + 1$, 这时对 t 来说, 一切满足 $0 \leqslant s < t$ 的非负整数 s 都有 $2n(k) \neq 2s + 1$, 所以由 (i) 可得

$$x^{n(k)-t} D^{2k-t} f = \sqrt{x} D^{2k-t} f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(L)).$$

特别地, 对一切 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$ 都有 $D^{2k-t} f \in L^2[1, \infty)$. 于是利用 Goldberg 的先验估计①, 对 $t < j \leqslant 2k$ 便有

$$\|D^{2k-j} f\|^2 \leqslant K(\|f\|^2 + \|D^{2k-t} f\|^2), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(L)),$$

而 $n(k) - j = n(k) - t - (j - t) = \dfrac{1}{2} - (j - t) < 0$, 故

$$x^{n(k)-j} D^{2k-j} f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(L)).$$

定理证毕.

定义 5.4.5　设 A 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的闭线性算子, 则 A 的定义域 $\mathscr{D}(A)$ 赋以图模 $\|f\|_1 = \|f\| + \|Af\|$ 可成一 Banach 空间. 设 B 是 $\mathcal{H}$ 上的线性算子, $\mathscr{D}(B) \supset \mathscr{D}(A)$, 如果 B 是空间 $(\mathscr{D}(A), \|\cdot\|_1)$ 到空间 $\mathcal{H}$ 的有界算子, 则称 B 关于 A 相对有界. 如果 B 是空间 $(\mathscr{D}(A), \|\cdot\|_1)$ 到空间 $\mathcal{H}$ 的紧算子, 则称 B 关于 A 相对紧.

---

① 见 Goldberg[14] 定理 VI.6.1. 若 $f \in L^2[1, \infty)$, f 有直到 $n-1$ 阶的连续导数, $f^{(n-1)}$ 局部绝对连续且 $f^{(n)} \in L^2[1, \infty)$, 则 $f^{(k)} (k = 0, 1, \cdots, n)$ 属于 $L^2[1, \infty)$, 并且对任何正数 ε, 存在 $K = K(\varepsilon)$, 使得一切这样的函数 f 均满足

$$\|f^{(k)}\|^2 \leqslant K\|f\|^2 + \varepsilon\|f^{(n)}\|^2, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

引理 5.4.11 设 L 和 M 都是 $[1,\infty)$ 上的正则微分算式, 如果对任何 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$, 都有 $Mf \in L^2[1,\infty)$, 则 M 关于 $T_0(L)$ 相对有界, 即存在常数 K, 使得

$$\|Mf\| \leqslant K(\|f\| + \|Lf\|), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(L)).$$

证明 如果 $f_n \to f((\mathscr{D}(T_0(L)), \|\cdot\|_1))$, 而 $Mf_n \to g(L^2[1,\infty))$, 则显然 $f_n \to f(L^2[1,\infty))$, 由 $T_1(M)$ 是闭算子知 $f \in \mathscr{D}(T_1(M))$ 并且 $g = Mf$. 因此 M 是空间 $(\mathscr{D}(T_0(L)), \|\cdot\|_1)$ 到空间 $L^2[1,\infty)$ 的闭线性算子, 这样由闭图像定理便得 M 是有界算子. 证毕.

引理 5.4.12 设 L 和 M 都是 $[1,\infty)$ 上正则微分算式, $T_0(L)$ 有闭值域. 如果 M 的阶数 $<$ L 的阶数且 M 关于 $T_0(L)$ 相对紧, 则 $T_0(L+M)$ 有闭值域且

$$\mathscr{D}(T_0(L+M)) = \mathscr{D}(T_0(L)),$$

$$\text{nullity}T_1(L^+ + M^+) = \text{nullity}T_1(L^+).$$

证明 ① (1) $\mathscr{D}(T_0(L+M)) = \mathscr{D}(T_0(L))$.

设 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$, 则存在序列 $\{f_n\} \subset C_0^\infty(1,\infty)$ 使得在 $L^2[1,\infty)$ 中, $f_n \to f, Lf_n \to Lf$, 于是在 Banach 空间 $(\mathscr{D}(T_0(L)), \|\cdot\|_1)$ 中 $f_n \to f$, 因为相对紧算子一定是相对有界的, 所以在 $L^2[1,\infty)$ 中, $Mf_n \to Mf$, 即 $f \in \mathscr{D}(T_0(L+M))$, 故 $\mathscr{D}(T_0(L)) \subset \mathscr{D}(T_0(L+M))$.

反过来, 由于闭线性算子与相对紧算子的和还是闭线性算子 (见文献 [14] 第 V 章 §3 定理 V.3.7 的证明), 若以 Q 表示 M 在 $\mathscr{D}(T_0(L))$ 上的限制, 则 $T_0(L)+Q$ 是闭线性算子, $\mathscr{D}(T_0(L)+Q) = \mathscr{D}(T_0(L))$.

如果 $f \in \mathscr{D}(T_0(L+M))$, 则有序列 $\{f_n\} \subset C_0^\infty(1,\infty)$, 使得在 $L^2[1,\infty)$ 上 $f_n \to f$ 且 $(L+M)f_n \to (L+M)f$, 即 $\{(T_0(L)+Q)f_n\}$ 收敛, 由 $T_0(L)+Q$ 的闭性便得 $f \in \mathscr{D}(T_0(L)+Q) = \mathscr{D}(T_0(L))$, 所以又有 $\mathscr{D}(T_0(L+M)) \subset \mathscr{D}(T_0(L))$, 两者综合起来得 $\mathscr{D}(T_0(L+M)) = \mathscr{D}(T_0(L))$.

(2) 由于 $T_0(L+M) = T_0(L)+Q$, 其中, Q 关于 $T_0(L)$ 相对紧, 所以由 [14]berg[15] 第 V 章 §3 定理 V.3.7, $T_0(L+M)$ 有闭值域.

(3) $\text{nullity}T_1(L^+ + M^+) = \text{nullity}T_1(L^+)$.

因为 $\text{ran}T_0(L)$ 闭, 所以由 $T_0(L)^* = T_1(L^+)$ 得

$$\text{ran}T_0(L) \oplus \ker T_1(L^+) = L^2[1,\infty).$$

故 $T_0(L)$ 的亏指标为

$$\beta(T_0(L)) = \dim L^2[1,\infty)/\text{ran}T_0(L) = \text{nullity}T_1(L^+),$$

① 本引理用到较多的泛函分析知识, 有关内容请读者参考文献 [14] 的第 IV 章 §2 与第 V 章 §3.

而由存在唯一性定理, $T_0(L)$ 的核指标为

$$\alpha(T_0(L)) = \dim \ker T_0(L) = \text{nullity} T_0(L) = 0,$$

于是 $T_0(L)$ 的指标是有限的:

$$\text{index} T_0(L) = \alpha(T_0(L)) - \beta(T_0(L)) = -\text{nullity} T_1(L^+) < \infty,$$

故 $T_0(L)$ 是 Fredholm 算子. 因为 Q 关于 $T_0(L)$ 相对紧, 所以由文献 [14] 第 V 章 §3 定理 V.3.7, 对于相对紧的摄动, 算子的指标不改变, 故

$$\text{index} T_0(L+M) = \text{index } T_0(L).$$

同样地, $\alpha(T_0(L+M)) = 0, \beta(T_0(L+M)) = \text{nullity} T_1(L^+ + M^+)$, 所以最后得

$$\text{nullity} T_1(L^+ + M^+) = \text{nullity} T_1(L^+).$$

引理证毕.

引理 5.4.13 设 L 和 M 都是 $[1,\infty)$ 上的正则微分算式, $T_0(L)$ 有闭值域, 如果 M 的阶数 $< L$ 的阶数且存在正数 ε, 使得对于一切 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$ 都有 $x^\varepsilon Mf \in L^2[1,\infty)$, 则 M 关于 $T_0(L)$ 相对紧.

证明 (1) $T_0(L)^{-1}$ 存在且为从 $\text{ran} T_0(L)$ 到 $L^2[1,\infty)$ 的有界线性算子.

由微分方程的存在唯一性定理, 如果 $f \in \ker T_0(L)$, 则 $f = 0$, 所以 $T_0(L)^{-1}$ 存在, 因为 $\text{ran} T_0(L)$ 闭, 而 $T_0(L)$ 是闭算子, 故由闭图像定理, $T_0(L)^{-1}$ 是有界的.

(2) $x^\varepsilon MT_0(L)^{-1}$ 是从 $\text{ran} T_0(L)$ 到 $L^2[1,\infty)$ 的有界线性算子.

只需证明算子 $x^\varepsilon MT_0(L)^{-1}$ 有闭图像即可. 设在空间 $L^2[1,\infty)$ 中,

$$f_n \to f, \quad x^\varepsilon MT_0(L)^{-1} f_n \to g,$$

其中, $f_n = Lh_n, h_n \in \mathscr{D}(T_0(L))$. 因为 $\text{ran} T_0(L)$ 闭, 所以 $f = Lh, h \in \mathscr{D}(T_0(L))$. 由 $T_0(L)^{-1}$ 有界可得 $h_n \to h$. 按假定, $h, h_n \in \mathscr{D}(T_1(x^\varepsilon M))$, 而 $T_1(x^\varepsilon M)$ 是闭算子, 故 $g = x^\varepsilon Mh = x^\varepsilon MT_0(L)^{-1} f$, 即 $x^\varepsilon MT_0(L)^{-1}$ 的图像闭.

(3) 考虑算子 $x^{-\varepsilon}$, 由于对任何 $f \in L^2[1,\infty)$ 都有

$$\|x^{-\varepsilon f}\|^2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^{2\varepsilon}} |f|^2 \mathrm{d}x \leqslant \|f\|^2,$$

所以这是一个有界线性算子. 取 $\varphi_n \in C^\infty[1,\infty)$, 使得 $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1$ 且

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x \leqslant n, \\ 0, & n+1 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

于是

$$(1-\varphi_n)x^{-\varepsilon}=\begin{cases}0, & 1\leqslant x\leqslant n,\\ x^{-\varepsilon}, & n+1\leqslant x<\infty,\end{cases}$$

由 $|(1-\varphi_n)x^{-\varepsilon}|\leqslant \dfrac{1}{n^{\varepsilon}}$ 可得

$$\|(x^{-\varepsilon}-x^{-\varepsilon}\varphi_n)f\|^2=\int_1^{\infty}|(1-\varphi_n)x^{-\varepsilon}|^2|f|^2\mathrm{d}x\leqslant \frac{1}{n^{2\varepsilon}}\|f\|^2,$$

即

$$\|x^{-\varepsilon}-x^{-\varepsilon}\varphi_n\|\leqslant \frac{1}{n^{\varepsilon}},$$

所以算子序列 $\{x^{-\varepsilon}\varphi_n\}$ 一致收敛到算子 $x^{-\varepsilon}$. 于是

$$\|x^{-\varepsilon}\varphi_n x^{\varepsilon}MT_0(L)^{-1}-x^{-\varepsilon}x^{\varepsilon}MT_0(L)^{-1}\|\leqslant\|x^{-\varepsilon}\varphi_n-x^{-\varepsilon}\|\|x^{\varepsilon}MT_0(L)^{-1}\|\to 0,$$

即算子序列 $\{\varphi_n MT_0(L)^{-1}\}$ 一致收敛到 $MT_0(L)^{-1}$.

(4) $\varphi_n MT_0(L)^{-1}$ 都是紧算子, 所以 $MT_0(L)^{-1}$ 是紧算子.

为了让符号简单些, 下面证明 $\varphi MT_0(L)^{-1}$ 是紧算子, 其中, φ 是支集含于 $[1,b]$ 内的 C^{∞} 函数. 设 $\{f_n\}$ 是 $\mathrm{ran}T_0(L)$ 的有界集, 如果证明了 $\{\varphi MT_0(L)^{-1}f_n\}$ 也是 Sobolev 空间 $W^{1,2}[1,\infty)$ 的有界集, 则由嵌入定理便可得 $\{\varphi MT_0(L)^{-1}f_n\}$ 是 $W^{0,2}[1,\infty)=L^2[1,\infty)$ 的紧集. 设 $f_n=Lg_n, g_n\in\mathscr{D}(T_0(L))$, 因为 $\|f_n\|=\|Lg_n\|$ 有界, 所以利用常数变易法 (与引理 5.4.10 中的证明相同) 便可得

$$|D^k g_n(x)|\leqslant C\|Lg_n\|,\quad k=0,1,\cdots,N-1,1\leqslant x\leqslant b,$$

其中, C 是某个常数, N 是 L 的阶数. 因为 $(\varphi MT_0(L)^{-1}f_n)'=(\varphi Mg_n)'=\varphi' Mg_n+\varphi(Mg_n)'$, 而由

$$D^N g_n=\frac{1}{p_N}\left(Lg_n-\sum_{k=0}^{N-1}p_k D^k g_n\right),\quad L\equiv\sum_{k=0}^{N}p_k D^k$$

可得

$$\left(\int_1^b |D^N g_n|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_1\|Lg_n\|,$$

按定义 $\|\varphi MT_0(L)^{-1}f_n\|^2_{W^{1,2}}=\|\varphi Mg_n\|^2+\|(\varphi Mg_n)'\|^2$, 根据假定的条件, M 关于 $T_0(L)$ 相对有界, 所以存在常数 K 使得

$$\|Mg\|\leqslant K(\|g\|+\|Lg\|),\quad g\in\mathscr{D}(T_0(L)).$$

于是

$$\|\varphi M g_n\|^2=\int_1^b|\varphi|^2|Mg_n|^2\mathrm{d}x\leqslant A(\|g_n\|+\|Lg_n\|)^2,$$

而

$$\begin{aligned}\|(\varphi Mg_n)'\|^2&=\|\varphi' Mg_n+\varphi(Mg_n)'\|^2\leqslant(\|\varphi' Mg_n\|+\|\varphi(Mg_n)'\|)^2\\&\leqslant\left[B_1(\|g_n\|+\|Lg_n\|)+B_2\sum_{k=0}^{N}\left(\int_1^b|D^kg_n|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\\&\leqslant B(\|g_n\|+\|Lg_n\|)^2,\end{aligned}$$

故可得

$$\|\varphi MT_0(L)^{-1}f_n\|^2_{W^{1,2}}\leqslant\sqrt{A+B}(\|g_n\|+\|Lg_n\|)\leqslant\sqrt{A+B}(1+\|T_0(L)^{-1}\|)\|f_n\|,$$

即 $\{\varphi MT_0(L)^{-1}f_n\}$ 是 $W^{1,2}[1,\infty)$ 的有界集.

(5) 注意到 $T_0(L)$ 是从 $(\mathscr{D}(T_0(L)),\|\cdot\|_1)$ 到 $\mathrm{ran}T_0(L)$ 的有界线性算子, 便可得 M 关于 $T_0(L)$ 的相对紧性质. 引理得证.

引理 5.4.14　设 $L=\sum\limits_{k=r}^{N}(-1)^kc_kD^kx^{n(k)}D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上满足下列条件的正则微分算式

(1) $c_r>0$;

(2) $c_k\geqslant 0$;

(3) 当 $k>j$ 时, $n(k)-2k<n(j)-2j$;

则存在正数 ε, 使得对任何 $f\in\mathscr{D}(T_0(L))$ 和任何 $k>r, c_k>0$, 都有

$$x^{\varepsilon}x^{n(k)-j}D^{2k-j}f\in L^2[1,\infty),\quad j=1,\cdots,2k.$$

证明　只需证明对每个 $k>r, c_k>0$ 和每个 $j, 1\leqslant j\leqslant 2k$ 都有这样的正数 ε 存在即可. 假设 $k>r, c_k>0$, 对 $j=2k$, 因为 $n(k)-2k<n(r)-2r$, 而由于 $T_0(L)$ 是分离的, 对任何 $f\in\mathscr{D}(T_0(L))$ 都有 $x^{n(r)-2r}f\in L^2[1,\infty)$, 因此只要取 $0<\varepsilon<(n(r)-2r)-(n(k)-2k)$ 便有 $x^{\varepsilon}x^{n(k)-2k}f\in L^2[1,\infty)$. 当 $1\leqslant j\leqslant 2k-1$ 时, 用有限归纳法来证明. 假定 $j\geqslant l\geqslant 2$ 时引理已成立, 证明 $j=l-1$ 时引理也成立. 以下记 $\alpha=n(k)-l$.

(1) 先考虑 $f\in C_0^{\infty}(1,\infty)$ 的情形. 这时对任何 $\varepsilon>0$ 均有 $x^{\varepsilon}x^{n(k)-(l-1)}D^{2k-(l-1)}f\in L^2[1,\infty)$. 下面推导一个不等式以便能过渡到一般的 $f\in\mathscr{D}(T_0(L))$.

$$\begin{aligned}&\|x^{\varepsilon}x^{n(k)-(l-1)}D^{2k-(l-1)}f\|^2=|(x^{\varepsilon}x^{\alpha+1}D^{2k-(l-1)}f,x^{\varepsilon}x^{\alpha+1}D^{2k-(l-1)}f)|\\&=|(D^{2k-l+1}x^{2\varepsilon+2\alpha+2}D^{2k-l+1}f,f)|\end{aligned}$$

$$\leqslant |2\varepsilon+2\alpha+2||(D^{2k-l}x^{2\varepsilon+2\alpha+1}D^{2k-l+1}f,f)|+|(D^{2k-l}x^{2\varepsilon+2\alpha+2}D^{2k-l+2}f,f)|$$
$$\leqslant |2\varepsilon+2\alpha+2|\|x^{\alpha+2\varepsilon}D^{2k-l}f\|\|x^{\alpha+1}D^{2k-l+1}f\|+\|x^{\alpha+2\varepsilon}D^{2k-l}f\|\|x^{\alpha+2}D^{2k-l+2}f\|.$$

由归纳法的假定, 存在正数 δ, 使得对一切 $f\in\mathscr{D}(T_0(L))$ 都有 $x^{\delta}x^{n(k)-l}D^{2k-l}f\in L^2[1,\infty)$, 即 $x^{\delta+\alpha}D^{2k-l}f\in L^2[1,\infty)$, 因此算子 $T=x^{\delta+\alpha}D^{2k-l}$ 关于 $T_0(L)$ 相对有界, 存在常数 K_1, 使得

$$\|x^{\delta+\alpha}D^{2k-l}f\|\leqslant K_1(\|f\|+\|Lf\|),\quad f\in\mathscr{D}(T_0(L)).$$

另外, 由定理 5.4.2, $T_0(L)$ 是分离的, 所以对一切 $f\in\mathscr{D}(T_0(L))$, 都有

$$x^{n(k)-(l-1)}D^{2k-(l-1)}f=x^{\alpha+1}D^{2k-l+1}f\in L^2[1,\infty),$$

$$x^{n(k)-(l-2)}D^{2k-(l-2)}f=x^{\alpha+2}D^{2k-l+2}f\in L^2[1,\infty).$$

于是算子 $T'=x^{\alpha+1}D^{2k-l+1}$ 和 $T''=x^{\alpha+2}D^{2k-l+2}$ 都关于 $T_0(L)$ 相对有界, 存在常数 K_2, 使得

$$\|x^{\alpha+1}D^{2k-l+1}f\|\leqslant K_2(\|f\|+\|Lf\|),\quad f\in\mathscr{D}(T_0(L)),$$

$$\|x^{\alpha+2}D^{2k-l+2}f\|\leqslant K_2(\|f\|+\|Lf\|),\quad f\in\mathscr{D}(T_0(L)).$$

这样, 只要 $0<\varepsilon<\dfrac{\delta}{2}$ 便有常数 K, 使得

$$\|x^{\varepsilon}x^{n(k)-(l-1)}D^{2k-(l-1)}f\|^2\leqslant K(\|f\|+\|Lf\|)^2,\quad f\in C_0^{\infty}(1,\infty).$$

(2) 对于任何 $f\in\mathscr{D}(T_0(L))$, 由最小算子的定义, 存在 $\{f_n\}\subset C_0^{\infty}(1,\infty)$, 使得 $f_n\to f$ 并且 $Lf_n\to Lf$, 于是由

$$\|x^{\varepsilon}x^{n(k)-(l-1)}D^{2k-(l-1)}(f_n-f_m)\|^2\leqslant K(\|f_n-f_m\|+\|Lf_n-Lf_m\|)^2\to 0$$

和算子 $T_1(x^{\varepsilon}x^{n(k)-(l-1)}D^{2k-(l-1)})$ 是闭的便得 $f\in\mathscr{D}(T_1(x^{\varepsilon}x^{n(k)-(l-1)}D^{2k-(l-1)}))$, 即

$$x^{\varepsilon}x^{n(k)-(l-1)}D^{2k-(l-1)}f\in L^2[1,\infty).$$

归纳法步骤就此完成. 引理得证.

引理 5.4.15 设 L 是 $[1,\infty)$ 上的正则微分算式, 如果存在 $c>0$ 使得对任何 $f\in C_0^{\infty}(1,\infty)$ 都有 $|(Lf,f)|\geqslant c\|f\|^2$, 则 $T_0(L)$ 有闭值域.

证明 设 $f\in\mathscr{D}(T_0(L))$, 由最小算子的定义, 存在 $\{f_n\}\subset C_0^{\infty}(1,\infty)$, 使得 $f_n\to f$ 并且 $Lf_n\to Lf$, 这样由不等式

$$|(Lf_n,f_n)|\geqslant c\|f_n\|^2$$

取极限便可得

$$|(Lf,f)| \geqslant c\|f\|^2.$$

假若有序列 $f_n \subset \mathscr{D}(T_0(L))$, 使得 $Lf_n \to g$, 则由

$$|(L(f_n - f_m), f_n - f_m)| \geqslant c\|f_n - f_m\|^2$$

知

$$\|Lf_n - Lf_m\| \geqslant c\|f_n - f_m\|,$$

即 $\{f_n\}$ 是 $L^2[1,\infty)$ 的 Cauchy 列, 因此必存在 $f \in L^2[1,\infty)$ 使得 $f_n \to f$. 由于 $T_0(L)$ 是闭算子, 所以 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$ 并且 $g = Lf$, 这表示 $T_0(L)$ 的值域是闭的.

引理 5.4.16　设 $[1,\infty)$ 上的正则微分算式 $L = \sum\limits_{k=0}^{N}(-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 满足下列条件:

(1) $c_0 > 0, n(0) \geqslant 0$;

(2) $c_k \geqslant 0$;

(3) 当 $k > j$ 时, $n(k) - 2k < n(j) - 2j$.

如果 $T_1(L)f = 0$, 则对任何自然数 n 都有 $x^n f \in L^2[1,\infty)$.

证明　令 $R = x^{-n}Lx^n, M = R - L$, 则利用 Leibnitz 法则将高阶导数展开可得

$$M = \sum_{k=1,c_k>0,1\leqslant j\leqslant 2k}^{N} b_{kj} x^{n(k)-j} D^{2k-j},$$

由引理 5.4.14, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任何 $g \in \mathscr{D}(T_0(L))$, 都有 $x^\varepsilon Mg \in L^2[1,\infty)$. 因为对任何 $g \in C_0^\infty(1,\infty)$,

$$|(Lg,g)| = \sum_{k=0}^{N} c_k \|x^{\frac{n(k)}{2}} D^k g\|^2 \geqslant c_0\|g\|^2,$$

所以 $T_0(L)$ 有闭值域, 这样 M 就关于 $T_0(L)$ 相对紧, 于是根据引理 5.4.12,

$$\text{nullity}T_1(R^+) = \text{nullity}T_1(L).$$

但是 $R^+ = x^n L x^{-n}$, 故若 $g \in \ker T_1(R^+)$, 便有 $x^{-n}g \in \ker T_1(L)$. 作 $\ker T_1(R^+)$ 到 $\ker T_1(L)$ 的映射 $\tau : \tau g = x^{-n}g$, 显然 τ 线性且保持线性无关, 由于这两个空间维数相等, τ 必是映上的. 这样对 $f \in \ker T_1(L)$ 便有 $g \in \ker T_1(R^+)$ 使得 $\tau g = f$, 即 $f = x^{-n}g$, 故 $x^n f = g \in L^2[1,\infty)$, 证毕.

引理 5.4.17　设 $L = \sum\limits_{k=0}^{N}(-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上的正则微分算式, 满足下列条件:

(1) $c_0 > 0, n(0) \geqslant 0$;

(2) $c_k \geqslant 0$;

(3) 当 $k > j$ 时, $n(k) - 2k < n(j) - 2j$.

如果 L 是极限点的[①], 而 $T_1(L)f = 0$, 则对任何非负整数 r 与 k 都有 $x^r D^k f \in L^2[1,\infty)$.

证明 $k = 0$ 的情形前面已经证明了.

(1) 令 $R = x^{-n}Lx^n, S = R - L$, 这里 n 是自然数. 由于对任何 $f \in C_0^\infty(1,\infty)$ 通过分部积分可得

$$|(Lf,f)| = \sum_{k=0}^{N} c_k \|x^{\frac{n(k)}{2}} D^k f\|^2 \geqslant c_0 \|f\|^2,$$

所以 $\mathrm{ran}T_0(L)$ 闭. 再由引理 5.4.13 与引理 5.4.14, S 关于 $T_0(L)$ 相对紧, 所以由引理 5.4.12, $\mathscr{D}(T_0(R)) = \mathscr{D}(T_0(L))$. $\mathrm{ran}T_0(R)$ 闭且

$$\mathrm{nullity}T_1(R^+) = \mathrm{nullity}T_1(L).$$

因为 $S^+ = R^+ - L$ 与 S 是同一类型的算子, 所以 S^+ 关于 $T_0(L)$ 也相对紧, 于是 $\mathscr{D}(T_0(R^+)) = \mathscr{D}(T_0(L))$, $\mathrm{ran}T_0(R^+)$ 闭且

$$\mathrm{nullity}T_1(R) = \mathrm{nullity}T_1(L).$$

这样根据定理 1.2.1 与 L 是极限点的便知 R 与 R^+ 也都是极限点的, 因此 $T_1(R)$ 与 $T_0(R)$ 的定义域以及 $T_1(L)$ 与 $T_0(L)$ 的定义域都只差紧支集的 C^∞ 函数, 由于 $\mathscr{D}(T_0(R)) = \mathscr{D}(T_0(L))$, 所以 $\mathscr{D}(T_1(R)) = \mathscr{D}(T_1(L))$.

(2) 若 $f \in \ker T_1(L)$, 则对任何自然数 n, $x^n f \in L^2[1,\infty)$, 故 $g = x^n f \in \ker T_1(R)$, 于是 $g \in \mathscr{D}(T_1(L))$, 由引理 1.2.4, 存在 $g_1 \in \mathscr{D}(T_0(L))$ 与 $g_2 \in C^\infty$, $\mathrm{supp}g_2$ 紧, 使得 $g = g_1 + g_2$, 根据定理 5.4.2, $T_0(l)$ 分离, $x^{n(N)-k}D^{2N-k}g_1 \in L^2[1,\infty)(k = 0,1,\cdots,2N)$ 因此也有

$$x^{n(N)-k}D^{2N-k}g \in L^2[1,\infty) \quad k = 0,1,\cdots,2N.$$

(3) 对任何非负整数 $r, x^r Df = x^r D(x^{-n}g) = x^{r-n}Dg - nx^{r-n-1}g$, 对给定的 r, 选 n 充分大使 $r - n - 1 < 0, r - n < n(N) - 2N + 1$, 则由 (2) 便可得 $x^r Df \in L^2[1,\infty)(r = 0,1,2,\cdots)$. 同样地, 对非负整数 r, 由

$$x^r D^2 f = x^r D^2(x^{-n}g) = x^{r-n}D^2 g - 2nx^{r-n-1}Dg + n(n+1)x^{r-n-2}g,$$

① 这一假定其实是不必要的, 因为下面将证明这一类微分算式都是极限点的.

取 n 充分大使得 $r-n-2<0, r-n-1<n(N)-2N+1$, 则由 (2) 又可得 $x^rD^2f\in L^2[1,\infty)(r=0,1,2,\cdots)$. 如此作下去最后可得 $x^rD^{2N}f\in L^2[1,\infty)(r=0,1,2,\cdots)$.

(4) 若 $f\in\ker T_1(L)$, 由于幂函数在 $[1,\infty)$ 上无穷可微, 所以由 $DLf=0$ 得 $D^{2N+1}f$ 存在且

$$c_Nx^{n(N)}D^{2N+1}f+Mf=0,$$

其中, M 是一个阶数 $\leqslant 2N$ 的多项式系数微分算式, 由 (3) 知

$$x^rMf\in L^2[1,\infty),\quad r=0,1,2,\cdots.$$

故

$$x^rD^{2N+1}f\in L^2[1,\infty),\quad r=0,1,2,\cdots.$$

按这样作下去便可证得引理.

引理 5.4.18　设 $L\equiv\sum\limits_{k=0}^{N}p_k(x)D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上的正则微分算式, 如果 f 满足下列条件:

(1) $f\in L^2[1,\infty)$;

(2) $D^kf(1)=0, k=0,1,\cdots,N-1$;

(3) 对任何 $k=0,1,\cdots,N$, 当 $0\leqslant j\leqslant k$ 时, 都有 $p_k(x)D^{k-j}f\in L^2[1,\infty)$;

则 $f\in\mathscr{D}(T_0(L))$.

证明　取 $h\in C^\infty(-\infty,\infty)$, 使得

$$h(x)=\begin{cases}1, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

在 $[1,\infty)$ 上令

$$h_n(x)=h(x-n),\quad n=1,2,\cdots,$$

则 $h_n(x)$ 在 $[n+1,\infty)$ 上为零, 当 n 趋于无穷时, $\|h_nf-f\|=\left(\int_n^\infty|h_n-1|^2|f|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 趋于零. 另外, 由

$$L(h_nf)=h_nLf+\sum_{k=1}^{N}p_k\sum_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}k\\ j\end{pmatrix}D^jh_nD^{k-j}f,$$

当 n 趋于无穷时, 显然有

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}k\\ j\end{pmatrix}D^jh_n\cdot p_kD^{k-j}f\right\|^2\leqslant C\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}\int_n^\infty|p_kD^{k-j}f|^2\mathrm{d}x\to 0,$$

故 n 趋于无穷时,

$$\|L(h_n f)-Lf\|\leqslant\|h_nLf-Lf\|+\left\|\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}k\\j\end{pmatrix}D^jh_n\cdot p_kD^{k-j}f\right\|$$
$$=\left(\int_n^\infty|h_n-1|^2|Lf|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left\|\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}\begin{pmatrix}k\\j\end{pmatrix}D^jh_n\cdot p_kD^{k-j}f\right\|$$

趋于零, 于是 $L(h_nf)$ 在 $L^2[1,\infty)$ 中收敛到 Lf.

下面证明 $h_nf\in\mathscr{D}(T_0(L))$. 由条件 (2), $D^k(h_nf)(1)=0,k=0,1,\cdots,N-1$ 并且 $\mathrm{supp}h_nf\subset[1,n+2]$, 如果记 M 为 L 在区间 $[1,n+2]$ 上的限制, 则由于

$$\mathscr{D}(T_0(M))=\{f\in\mathscr{D}(T_1(M))|D^kf(1)=D^kf(n+2)=0,k=0,1,\cdots,N-1\},$$

h_nf 限制在 $[1,n+2]$ 上显然是在 $T_0(M)$ 的定义域中, 故存在 $C_0^\infty(1,n+2)$ 的序列 $\{f_m\}$ 使得在空间 $L^2[1,n+2]$ 上, $f_m\to h_nf,Lf_m\to L(h_nf)$, 将 f_m 零扩张到整个 $[1,\infty)$ 上, 则 $f_m\subset C_0^\infty(1,\infty)$ 且在空间 $L^2[1,\infty)$ 上, $\{f_m\}\to h_nf,Lf_m\to L(h_nf)$, 这表示 $h_nf\in\mathscr{D}(T_0(L))$.

由于 $T_0(L)$ 是闭算子, 而在空间 $L^2[1,\infty)$ 中 $h_nf\to f,L(h_nf)\to Lf$ 所以 $f\in\mathscr{D}(T_0(L))$. 证毕.

引理 5.4.19 设 $L\equiv\sum_{k=0}^{N}(-1)^kc_kD^kx^{n(k)}D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上满足下列条件的正则微分算式:

(1) $c_k\geqslant0,c_0>0,n(0)\geqslant2I$;

(2) 当 $k>j$ 时, $n(k)-2k<n(j)-2j$;

(3) L 是极限点的;

则 $M=(-1)^ID^ILD^I$ 也属于极限点型, $T_0(M)$ 有闭值域且 $T_1(M)$ 是分离的.

证明 (1) $\mathrm{ran}T_0(M)$ 闭, 因为对 $f\in C_0^\infty(1,\infty)$ 有

$$|(Mf,f)|=\left|\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^{k+I}c_kD^{k+I}x^{n(k)}D^{k+I}f,f\right)\right|$$
$$=\sum_{k=0}^{N}c_k\int_1^\infty x^{n(k)}|D^{k+I}f|^2\mathrm{d}x$$
$$\geqslant c_0\|x^{\frac{n(0)}{2}}D^If\|^2=c_0\left((-1)^I D^Ix^{n(0)}D^If,f\right),$$

由引理 5.4.7, 存在正数 ε 使得 $(-1)^ID^Ix^{n(0)}D^I>\varepsilon x^{n(0)-2I}$, 故 $|(Mf,f)|\geqslant c_0\varepsilon\|f\|^2$.

(2) 由 L 的平方可积解可以构造 M 的平方可积解. 设 $g \in \ker T_1(L)$, 由引理 5.4.16, $x^r g \in L^2[1,\infty)(r=0,1,2,\cdots)$, 令

$$g^*(x)=\int_1^x g(t)\mathrm{d}t,$$

因为

$$\int_1^\infty |g(x)|\mathrm{d}x=\int_1^\infty \frac{1}{x}|xg(x)|\mathrm{d}x \leqslant \|\frac{1}{x}\|\ \|xg\|,$$

所以可以设 $a_1=\displaystyle\int_1^\infty g(x)\mathrm{d}x$. 于是

$$\begin{aligned}|g^*(x)-a_1|&=\left|\int_x^\infty g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^{2r}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^\infty t^{2r}|g(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant C^* x^{\frac{1}{2}-r}, \quad r=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

由此可知

$$x^r(g^*-a_1)\in L^2[1,\infty), \quad r=0,1,2,\cdots.$$

再令

$$g^{**}(x)=\int_1^x (g^*(t)-a_1)\mathrm{d}t.$$

同样地, g^*-a_1 绝对可积, 故 $a_2=\displaystyle\int_1^\infty (g^*(x)-a_1)\mathrm{d}x$ 存在, 而

$$\begin{aligned}|g^{**}(x)-a_2|&=\left|\int_x^\infty (g^*(t)-a_1)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant \left(\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^{2r}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^\infty t^{2r}|g^*(t)-a_1|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C^{**}x^{\frac{1}{2}-r},\end{aligned}$$

其中, $r=1,2,\cdots$. 所以

$$x^r(g^{**}-a_2)\in L^2[1,\infty), \quad r=0,1,2,\cdots.$$

这样做过 I 次以后便可得到一个函数 $f(x)$, 使得

$$D^I f=g,$$

而 $x^r(f-p)\in L^2[1,\infty)(r=0,1,2,\cdots)$, 其中, p 是一个 $I-1$ 阶的多项式. 记 $h(x)=f(x)-p(x)$, 则 $h\in \ker T_1(M)$. 从构造可知

$$x^r D^k h \in L^2[1,\infty), \quad k=0,1,\cdots,I; \quad r=0,1,2,\cdots.$$

但是由引理 5.4.17, $x^r D^k g \in L^2[1,\infty), k, r = 0,1,2,\cdots$, 故

$$x^r D^k h \in L^2[1,\infty), \quad k, r = 0,1,2,\cdots.$$

(3) 由于 $\mathrm{ran}T_0(L)$ 显然是闭的, 而 L 属于极限点型, 故

$$\mathrm{nullity}T_1(L) = N.$$

对 $\ker T_1(L)$ 的一组基 $g_1,\cdots,g_N$, 可以构造出相应的一组 M 的平方可积解 $h_1,\cdots,h_N$, 它们也是线性无关的. 对每一个 h_j, 取 $\varphi_j \in C^\infty, \mathrm{supp}\varphi_j \subset [1,2]$ 且

$$D^k\varphi_j(1) = D^k h_j(1), \quad k = 0,1,\cdots,2N+2I-1.$$

这样由引理 5.4.18, $h_j - \varphi_j \in \mathscr{D}(T_0(M)), \quad j = 1,\cdots,N$.

对任何 $f \in \ker T_1(M)$, 因为

$$h_j - \varphi_j \in \mathscr{D}(T_1(M)^*) = \mathscr{D}(T_0(M)), \quad 0 = (Mf, h_j - \varphi_j) = (f, M(h_j - \varphi_j)).$$

于是由 Green 公式知

$$(Mf, h_j - \varphi_j) - (f, M(h_j - \varphi_j)) = [f, h_j - \varphi_j]_1^\infty = [f, h_j - \varphi_j](\infty) = [f, h_j](\infty).$$

可是 $f \in \ker T_1(M), h_j \in \ker T_1(M)$, 由 Green 公式又有

$$0 = (Mf, h_j) - (f, Mh_j) = [f, h_j]_1^\infty = -[f, h_j](1).$$

另外, 对任何 $x^k (k = 0,1,\cdots,I-1)$, 由 $Mx^k = 0$ 知

$$0 = \int_1^x Mt^k \cdot \overline{h_j(t)}\mathrm{d}t - \int_1^x t^k \overline{Mh_j(t)}\mathrm{d}t = [x^k, h_j]_1^x,$$

即

$$[x^k, h_j](x) = [x^k, h_j](1).$$

但是 $x^r D^k h_j \in L^2[1,\infty), k, r = 0,1,2,\cdots$, 故

$$\lim_{x\to\infty} [x^k, h_j](x) = 0,$$

于是

$$[x^k, h_j](1) = 0, \quad j = 1,\cdots,N; \quad k = 0,1,\cdots,I-1.$$

(4) 考虑由 $\ker T_1(M)$ 与 $1, x, \cdots, x^{I-1}$ 张成的子空间 V, 后者不属于 $L^2[1,\infty)$, 所以 V 的维数是 $I + \mathrm{nullity}T_1(M)$. 作解空间 $\{f \mid Mf = 0\}$ 到 $\mathcal{C}^{2N+2I}$ 的映射

$$\sigma f = (f(1), Df(1), \cdots, D^{2N+2I-1}f(1))^T.$$

由存在唯一性定理, σ 保持线性无关, 所以 $\sigma(V)$ 的维数也是 $I+\text{nullity}T_1(M)$. 而 σ {由 $h_1,\cdots,h_N$ 生成的子空间} 的维数是 N, 因为 Lagrange 双线性型用 $\mathbf{C}^{2N+2I}$ 里的内积表示乃是

$$[f,g](1)=(\sigma f,(F_{kl})\sigma g),$$

其中, (F_{kl}) 是非退化的 $2N+2I$ 阶矩阵, 故由

$$[f,h_j](1)=0,\quad f\in\ker T_1(M);\quad j=1,\cdots,N,$$

$$[x^k,h_j](1)=0,\quad k=0,1,\cdots,I-1;j=1,\cdots,N$$

知 $(\sigma f,(F_{kl})\sigma h_j)=0, f\in V, j=1,\cdots,N$. $\sigma(V)$ 的维数是 $I+\text{nullity}T_1(M)$, $\{(F_{kl})\sigma h_j \mid j=1,\cdots,N\}$ 张成的子空间维数是 N. 这两个子空间直交, 于是

$$I+\text{nullity}T_1(M)\leqslant N+2I,$$

即

$$\text{nullity}T_1(M)\leqslant N+I.$$

注意到 $\text{ran}T_0(M)$ 闭, 由定理 1.2.1 与定理 1.2.3 便得

$$d(M)=\text{nullity}T_1(M)=N+I,$$

M 是极限点的.

(5) 因为 M 满足定理 5.4.2 的条件, $T_0(M)$ 是分离的, 而 M 属于极限点型, $\mathscr{D}(T_1(M))$ 与 $\mathscr{D}(T_0(M))$ 仅差紧支集的 C^∞ 函数, 所以 $T_1(M)$ 也分离. 引理证毕.

定理 5.4.3 设 $L\equiv\sum\limits_{k=0}^{N}(-1)^kc_kD^kx^{n(k)}D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上满足下列条件的正则微分算式:

(1) $c_k\geqslant 0$;

(2) 当 $k>j$ 时, $n(k)-2k<n(j)-2j$;

则 L 属于极限点型, 且 $T_1(L)$ 是分离的.

证明 (1) 由定理 5.4.2, $T_0(L)$ 分离, 所以如果能证明 L 属于极限点型, $T_1(L)$ 与 $T_0(L)$ 的定义域便只差紧支集的 C^∞ 函数, 于是 $T_1(L)$ 也是分离的.

(2) 下面用归纳法来证明 L 属于极限点型.

(i) $N=1$ 时, 因为 $c_0x^{n(0)}$ 有下界, 所以 L 是极限点的.

(ii) 设定理在 $\leqslant N$ 时都成立, 考虑 $N+1$ 的情形. 这时

$$L=-DMD+c_0x^{n(0)},\quad M=\sum_{j=r}^{K}(-1)^ja_jD^jx^{m(j)}D^j,$$

其中, $K \leqslant N, a_j \geqslant 0, a_r > 0$, 显然当 $s > t$ 时, $m(s) - 2s < m(t) - 2t$.

如果证明了 $-DMD$ 是极限点的, 则 L 便是极限点的. 因为

(a) $n(0) \geqslant 0$ 时, 对 $f \in C_0^\infty(1,\infty)$, 用分部积分可知

$$(Lf, f) \geqslant c_0(x^{n(0)}f, f) \geqslant c_0\|f\|^2,$$

所以 $\mathrm{ran}T_0(L)$ 闭. 若 $g \in \ker T_1(L)$, 由引理 5.4.16, 对任何自然数 n, $x^n g \in L^2[1,\infty)$, 特别地, $x^{n(0)}g \in L^2[1,\infty)$, 于是 $-DMDg$ 也属于 $L^2[1,\infty)$. 这样, 利用推论 1.2.3 便可得 L 是极限点的.

(b) $n(0) < 0$ 时, 可以考虑 $L+1$. 因为由定理 1.2.2, L 为极限点的充分必要条件是 $L+1$ 为极限点. 而 $\mathrm{ran}T_0(L+1)$ 显然是闭的, 由

$$L + 1 = -DMD + (c_0 x^{n(0)} + 1)$$

对任何 $g \in \ker T_1(L+1)$, 因为

$$\int_1^\infty (c_0 x^{n(0)} + 1)^2 |g|^2 \mathrm{d}x \leqslant (c_0+1)^2 \parallel g \parallel^2,$$

这样利用推论 1.2.3, $L+1$ 便是极限点的.

下面来证明 $-DMD$ 是极限点的:

① 如果 $m(r) \geqslant 2r+2$, 由于

$$-DMD = (-1)^{r+1}D^{r+1}\left(\sum_{l=0}^{K-r}(-1)^l a_{r+l}D^l x^{m(r+l)}D^l\right)D^{r+1},$$

根据归纳法假定,

$$\sum_{l=0}^{K-r}(-1)^l a_{r+l}D^l x^{m(r+l)}D^l$$

是极限点的, 利用引理 5.4.19, 便知 $-DMD$ 也是极限点的.

② 如果 $m(r) < 2r+2$, 只要证明 $-DMD+1$ 属于极限点型即可. 先取 $\alpha > 0$, 使得 $m(r) + 2\alpha = 2r+2$, 令

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=r}^{K}(-1)^{j+1}a_j D^{j+1}x^{m(j)+2\alpha}D^{j+1} + x^{2\alpha} \\ &= -D\left(\sum_{j=r}^{K}(-1)^j a_j D^j x^{m(j)+2\alpha}D^j\right)D + x^{2\alpha} \\ &= U + V, \end{aligned}$$

因为由归纳法假定与引理 5.4.19, U 是极限点的, V 显然也是极限点的. 当 $g \in \ker T_1(Q)$ 时, 由引理 5.4.16 可得 $Vg = x^{2\alpha}g \in L^2[1,\infty)$, 于是 $Ug \in L^2[1,\infty)$. 利用推论 1.2.3 便可得 Q 是极限点的.

考虑

$$R = x^\alpha(-DMD+1)x^\alpha = x^\alpha\left(\sum_{j=r}^{K}(-1)^{j+1}a_jD^{j+1}x^{m(j)}D^{j+1}\right)x^\alpha + x^{2\alpha},$$

有

$$\begin{aligned} R-Q &= \sum_{j=r}^{K}(-1)^{j+1}a_j\left(x^\alpha D^{j+1}x^{m(j)}D^{j+1}x^\alpha - D^{j+1}x^{m(j)+2\alpha}D^{j+1}\right) \\ &= \sum_{j=r}^{K}(-1)^{j+1}a_j\left(\sum_{s=1}^{2j+2}b_sx^{m(j)+2\alpha-s}D^{2j+2-s}\right). \end{aligned}$$

因为 Q 满足引理 5.4.14 的条件, 所以存在正数 ε 使得

$$\mathscr{D}\left(T_0(Q)\right) \subset \mathscr{D}\left(T_1(x^\varepsilon(R-Q))\right),$$

即 $R-Q$ 关于 $T_0(Q)$ 相对紧, 于是由引理 5.4.12 知 $\mathrm{ran}T_0(R)$ 闭且

$$\mathrm{nullity}T_1(R^+) = \mathrm{nullity}T_1(Q^+),$$

这样便得

$$\begin{aligned} d(R) &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{nullity}T_1(R^+) + \mathrm{nullity}T_1(R)\right] = \mathrm{nullity}T_1(R^+) = \mathrm{nullity}T_1(Q^+) \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{nullity}T_1(Q^+) + \mathrm{nullity}T_1(Q)\right] = d(Q) = K+1, \end{aligned}$$

因此 R 是极限点的.

如果 $f \in \ker T_1(-DMD+1)$, 则 $x^{-\alpha}f \in \ker T_1(R)$, 故

$$\mathrm{nullity}T_1(-DMD+1) \leqslant \mathrm{nullity}T_1(R) = K+1,$$

显然 $\mathrm{ran}T_0(-DMD+1)$ 是闭的, 故

$$d(-DMD+1) = \mathrm{nullity}T_1(-DMD+1) \leqslant K+1,$$

再应用定理 1.2.3, 便得 $d(-DMD+1) = K+1$, $-DMD+1$ 是极限点的, 于是归纳法步骤完成. 定理得证.

定理 5.4.4 设 $L \equiv \sum_{k=0}^{N}(-1)^k D^k p_k(x) D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上满足下列条件的正则微分算式:

(1) $p_k(x)$ 都是具实系数的实幂幂函数的有限线性组合,

$$p_N(x) = c_N x^{n(N)}, \quad c_N > 0,$$

$$p_k(x) = c_k x^{n(k)} + \text{低阶项}, \quad c_k \geqslant 0;$$

(2) 如果记 $r = \max\{n(k) - 2k \mid c_k > 0\}$, 集合 $\{k \mid c_k > 0, n(k) - 2k = r\}$ 是单点集;

则 (i) 存在正则微分算式

$$M \equiv \sum_{k=0}^{N}(-1)^k a_k D^k x^{m(k)} D^k$$

使得 $a_k \geqslant 0$, 当 $k > j$ 时, $m(k) - 2k < m(j) - 2j$. $L - M$ 关于 $T_0(M)$ 相对紧;

(ii) L 属于极限点型且 $T_1(L)$ 是分离的.

证明 (1) 构造 M: 取 $a_N = c_N, m(N) = n(N)$, 如果

$$l = \max\{k \mid p_k(x) \not\equiv 0, n(k) - 2k > n(N) - 2N\}$$

存在, 则对 $l < k < N$ 取 $a_k = 0$, 而 $a_l = c_l, m(l) = n(l)$. 否则对一切 $k < N$, 都取 $a_k = 0$.

假若 l 存在, 下一步当 $l_1 = \max\{k \mid k < l, p_k(x) \not\equiv 0, n(k) - 2k > n(l) - 2l\}$ 存在时, 对 $l_1 < k < l$, 取 $a_k = 0$, 而 $a_{l_1} = c_{l_1}, m(l_1) = n(l_1)$. 否则对一切 $k < l$, 都取 $a_k = 0$.

按照这样做下去便可以得到 M. 显然 M 的最后一项是

$$(-1)^{k_0} c_{k_0} D^{k_0} x^{n(k_0)} D^{k_0}, \text{其中}, n(k_0) - 2k_0 = r.$$

M 满足本定理的要求, 所以由定理 5.4.3, M 属于极限点型, $T_1(M)$ 分离. 这个 M 乃是微分算式 L 的主要部分.

(2) 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对一切 $f \in \mathscr{D}(T_0(M))$, 都有 $x^\varepsilon(L-M)f \in L^2[1,\infty)$: 考虑 $L - M$ 中的一项 $cD^j x^l D^j$, 分两种情形讨论.

(i) $l = n(j)$ 的情形. 这时这一项来自 $(-1)^j D^j p_j(x) D^j$, 根据 M 的构造, 存在 $k > j$ 使得 $n(k) - 2k \geqslant n(j) - 2j$, 而 $(-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 M 的一项.

如果 $k > k_0$, 则由引理 5.4.14 可得

$$x^\varepsilon D^j x^l D^j f \in L^2[1,\infty), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(M)).$$

如果 $k = k_0$, 则由条件 (2), $n(k_0) - 2k_0 > n(j) - 2j$, 由于 $T_1(M)$ 分离, 所以也存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$x^{\varepsilon} D^j x^l D^j f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(M)).$$

(ii) $l < n(j)$ 的情形.

如果 $(-1)^j c_j D^j x^{n(j)} D^j$ 是 M 的一项, 则由 $T_1(M)$ 分离, 可知存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$x^{\varepsilon} D^j x^l D^j f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(M)).$$

如果 $(-1)^j c_j D^j x^{n(j)} D^j$ 不是 M 的一项, 则由 M 的构造, 存在 $k > j$, 使得 $n(k) - 2k \geqslant n(j) - 2j$, 而 $(-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 M 的一项. 于是由 $T_1(M)$ 分离, 也存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$x^{\varepsilon} D^j x^l D^j f \in L^2[1, \infty), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(M)).$$

(3) L 是极限点的.

(i) 如果 $r \geqslant 0$, 即 $n(k_0) - 2k_0 \geqslant 0$, 由引理 5.4.7, 存在正数 ε, 使得

$$(-1)^{k_0} c_{k_0} D^{k_0} x^{n(k_0)} D^{k_0} > \varepsilon x^{n(k_0) - 2k_0} = \varepsilon x^r,$$

于是对 $f \in C_0^{\infty}(1, \infty)$, 有

$$|(Mf, f)| = \sum_{k=0}^{N} a_k \| x^{\frac{m(k)}{2}} D^k f \|^2 \geqslant \varepsilon \| f \|^2,$$

因此 $T_0(M)$ 有闭值域, 由 (2) 与引理 5.4.13, $L - M$ 关于 $T_0(M)$ 相对紧, 这样由引理 5.4.12 便可得 $\mathscr{D}(T_0(L)) = \mathscr{D}(T_0(M))$ 且 L 是极限点的.

(ii) 如果 $r < 0$, 考虑 $M + 1$, 它仍是极限点的. 此时 $T_0(M+1)$ 有闭值域. 但 $\mathscr{D}(T_0(M+1)) = \mathscr{D}(T_0(M))$, 由 (2) 与引理 5.4.13, $L - M$ 关于 $T_0(M+1)$ 相对紧, 利用引理 5.4.12, $\mathscr{D}(T_0(L+1)) = \mathscr{D}(T_0(M))$, $L + 1$ 是极限点的, 故 L 为极限点.

(4) $L - M$ 关于 $T_0(M)$ 相对紧. 只考虑 $r < 0$ 的情形. 设 $\{f_n\}$ 是空间 $(\mathscr{D}(T_0(M)), \| \cdot \|_1)$ 的有界集, 因为

$$\| f_n \|_1^* \equiv \| f_n \| + \| (M+1) f_n \| \leqslant 2 \| f_n \|_1,$$

所以 $\{f_n\}$ 也是空间 $(\mathscr{D}(T_0(M+1)), \| \cdot \|_1^*)$ 的有界集. 可是 $L - M$ 关于 $T_0(M+1)$ 相对紧, 故可以抽出子列 $\{f_{n_k}\}$ 使 $\{(L-M) f_{n_k}\}$ 在 $L^2[1, \infty)$ 中收敛.

(5) $T_1(L)$ 分离. 由于 $T_0(M)$ 分离, 而 $\mathscr{D}(T_0(L)) = \mathscr{D}(T_0(L+1)) = \mathscr{D}(T_0(M))$, 根据 M 的构造可得 $T_0(L)$ 的分离性质. 再利用 L 是极限点的以及定理 1.2.6, 便得 $T_1(L)$ 的分离性质. 定理证毕.

定理 5.4.5 设 $L \equiv \sum_{k=0}^{N}(-1)^k D^k p_k(x) D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上满足下列条件的正则微分算式:

(1) $p_k(x)$ 是具实系数的实幂幂函数的有限线性组合,

$$p_k(x) = c_k x^{n(k)} + \text{低阶项}, \quad c_k \geqslant 0,$$
$$c_N > 0;$$

(2) 如果记 $r = \max\{n(k)-2k \mid c_k > 0\}$, 集合 $\{k \mid c_k > 0, n(k)-2k = r\}$ 是单点集;

则 (i) 存在正则微分算式

$$M \equiv \sum_{k=0}^{N}(-1)^k a_k D^k x^{m(k)} D^k,$$

使得 $a_k \geqslant 0$, 当 $k > j$ 时, $m(k)-2k < m(j)-2j$. $L-M$ 关于 $T_0(M)$ 相对有界;

(ii) L 极限点且 $T_1(L)$ 分离.

证明 设 $p_N(x) = c_N x^{n(N)} + p_{N0}(x)$, 则 $p_{N0}(x)$ 的阶数 $< n(N)$. 记

$$L_0 \equiv (-1)^N c_N D^N x^{n(N)} D^N + \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k D^k p_k(x) D^k,$$

$$L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon W, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1,$$

其中, $W = (-1)^N D^N p_{N0}(x) D^N$, 则 $L = L_1$.

(1) 对 L_0 构造 M 如定理 5.4.4, 则 L_0 为极限点, $T_1(L_0)$ 分离且 $\mathscr{D}(T_0(L_0)) = \mathscr{D}(T_0(M))$.

(2) 对任何 $f \in \mathscr{D}(T_0(M))$, 因为 $T_1(L_0)$ 分离, 对 $l \geqslant 1$, $x^{n(N)-l}D^{2N-l}f$ 都平方可积, 所以由引理 5.4.11, $L-M$ 关于 $T_0(M)$ 相对有界.

(3) $T_0(L_\varepsilon)$ 是分离的. 考虑 $L_\varepsilon + 1 = L_0 + 1 + \varepsilon W$, 则

$$(L_\varepsilon+1)^2 = (L_0+1)^2 + \varepsilon^2 W^2 + \varepsilon\left((L_0+1)W + W(L_0+1)\right).$$

由定理 5.4.4, $L_0 = M + (L_0 - M)$, $L_0 - M$ 关于 $T_0(M)$ 相对紧, 所以

$$\mathscr{D}(T_0(L_0+1)) = \mathscr{D}(T_0(L_0)) = \mathscr{D}(T_0(M)) = \mathscr{D}(T_0(M+1)),$$

于是

$$\|(M+1)f\| \leqslant K(\|f\| + \|(L_0+1)f\|), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(L_0+1)).$$

因为 $\mathrm{ran}T_0(L_0+1)$ 闭, $(T_0(L_0+1))^{-1}$ 是有界线性算子, 故

$$\|(M+1)f\|\leqslant K_1\|(L_0+1)f\|;$$

即有某个 $\delta>0$ 使得

$$(L_0+1)^2>\delta(M+1)^2.$$

(i) 下面先证明对任何 $0\leqslant r\leqslant 2N$, 均有正数 η 使得

$$D^{2N}x^{2n(N)}D^{2N}+1>\eta(-1)^{2N-r}D^{2N-r}x^{2n(N)-2r}D^{2N-r}.$$

如果对一切 t, $0\leqslant t<r$, 都有 $2n(N)\neq 2t+1$, 则由引理 5.4.7, 便得不等式.

如果存在某个 t_0, $0\leqslant t_0<r$, 使得 $2n(N)=2t_0+1$, 则由引理 5.4.7 可得

$$D^{2N}x^{2n(N)}D^{2N}>\eta_1(-1)^{2N-t_0}D^{2N-t_0}x^{2n(N)-2t_0}D^{2N-t_0}.$$

记 $r=t_0+r_0,r_0\geqslant 1$, 于是对 $f\in C_0^\infty(1,\infty)$, 用 Goldberg 不等式将得

$$\begin{aligned}
&\left((-1)^{2N-r}D^{2N-r}x^{2n(N)-2r}D^{2N-r}f,f\right)\\
=&\int_1^\infty\frac{1}{x^{2r_0-1}}|D^{2N-r}f|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant&\|D^{2N-t_0-r_0}f\|^2\leqslant K\|f\|^2+\|D^{2N-t_0}f\|^2\\
\leqslant&\|\sqrt{x}D^{2N-t_0}f\|^2+K\|f\|^2\\
\leqslant&\frac{1}{\eta_1}\|x^{n(N)}D^{2N}f\|^2+K\|f\|^2.
\end{aligned}$$

因此不等式也成立.

(ii) $(L_0+1)^2+\varepsilon^2W^2\gg\varepsilon\left((L_0+1)W+W(L_0+1)\right)$: 考虑右端的某一项, 其形状为

$$c\left((-1)^jD^jx^lD^j\right)\left((-1)^ND^Nx^pD^N\right)\quad\text{或}\quad c\left((-1)^ND^Nx^pD^N\right)\left((-1)^jD^jx^lD^j\right),$$

其中, $l\leqslant n(j),p<n(N)$. 只看前一种情形, 把它展开来, 得

$$\sum_{r=0}^{N+2j}b_rx^{l+p-r}D^{2N+2j-r}.$$

当 $0\leqslant r\leqslant 2j$ 时, 对任何 $f\in C_0^\infty(1,\infty)$, 由 Leibnitz 法则与 Schwarz 不等式, 有

$$\left|\left(x^{l+p-r}D^{2N+2j-r}f,f\right)\right|=\left|\left(D^{2N}f,D^{2j-r}x^{l+p-r}f\right)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{u=0}^{2j-r} d_u \left|\left(D^{2N} f, x^{l+p-r-u} D^{2j-r-u} f\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{u=0}^{2j-r} d_u \parallel x^p D^{2N} f \| \parallel x^{l-r-u} D^{2j-r-u} f \parallel .
\end{aligned}
$$

可是

$$
D^{2N} x^{2n(N)} D^{2N} \gg D^{2N} x^{2p} D^{2N},
$$

$$
D^{2j} x^{2n(j)} D^{2j}+1 \geqslant D^{2j} x^{2l} D^{2j}+1>\eta(-1)^{2j-r-u} D^{2j-r-u} x^{2l-2r-u} D^{2j-r-u},
$$

再注意到 M 的构造, 存在 $k \geqslant j$, 使得 $n(k)-2k \geqslant n(j)-2j$, 而 $(-1)^k c_k D^k x^{n(k)} D^k$ 是 M 的一项, 所以有正数 η_1, 使得

$$
D^{2k} x^{2n(k)} D^{2k}+1>\eta_1\left(D^{2j} x^{2n(k)-2(2k-2j)} D^{2j}+1\right) \geqslant \eta_1\left(D^{2j} x^{2n(j)} D^{2j}+1\right),
$$

最后便可得

$$
(M+1)^2>\varepsilon_1\left(D^{2N} x^{2n(N)} D^{2N}+D^{2k} x^{2n(k)} D^{2k}+1\right) \gg x^{l+p-r} D^{2N+2j-r}.
$$

当 $2j+1 \leqslant r \leqslant 2j+N$ 时, 记 $r=2j+r_0, 1 \leqslant r_0 \leqslant N$, 对 $f \in C_0^{\infty}(1, \infty)$, 有

$$
\begin{aligned}
\left|\left(x^{l+p-r} D^{2N+2j-r} f, f\right)\right| &= \left|\left(x^{l+p-2j-r_0} D^{2N-r_0} f, f\right)\right| \\
&\leqslant \| x^{p-r_0} D^{2N-r_0} f \| \|x^{l-2j} f \| .
\end{aligned}
$$

同样地, 由

$$
\begin{aligned}
D^{2N} x^{2n(N)} D^{2N}+1 &> \eta(-1)^{2N-r_0} D^{2N-r_0} x^{2n(N)-2r_0} D^{2N-r_0} \\
&\gg (-1)^{2N-r_0} D^{2N-r_0} x^{2p-2r_0} D^{2N-r_0}, \\
D^{2k} x^{2n(k)} D^{2k}+1 &> \eta x^{2l-4j}
\end{aligned}
$$

也可得

$$
(M+1)^2>\varepsilon_1\left(D^{2N} x^{2n(N)} D^{2N}+D^{2k} x^{2n(k)} D^{2k}+1\right) \gg x^{l+p-r} D^{2N+2j-r}.
$$

所以最后总有

$$
\left(L_0+1\right)^2+\varepsilon^2 W^2 \gg \varepsilon\left(\left(L_0+1\right) W+W\left(L_0+1\right)\right).
$$

(iii) 仿造定理 5.4.2 的证法, 便可得 $T_0(L_\varepsilon)$ 是分离的.

(4) 因为 $T_0(L_\varepsilon)$ 分离, 所以 $\mathscr{D}(T_0(L_\varepsilon+1))=\mathscr{D}(T_0(L_0+1))$ 而且

$$
\|T_0(L_\varepsilon+1) f\| \leqslant K_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\left(\|f\|+\| T_0(L_{\varepsilon_1}+1) f \|\right), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(L_0+1)).
$$

由于对任给的 $\tau > 0$, 当 ε_1 与 ε_2 充分靠近时, 具体考虑 $T_0(L_{\varepsilon_2}+1)f$ 与 $T_0(L_{\varepsilon_1}+1)f$ 的表达式可得

$$\|T_0(L_{\varepsilon_2}+1)f - T_0(L_{\varepsilon_1}+1)f\| \leqslant \tau\left(\|f\| + \|T_0(L_{\varepsilon_1}+1)f\|\right), \quad f \in \mathscr{D}(T_0(L_0+1)).$$

而 $T_0(L_\varepsilon+1)$ 都有闭值域, 这样利用文献 [14] 的定理 V.3.6①, 算子的指标在微小摄动下不变, 故得

$$\mathrm{Index}T_0(L_\varepsilon+1) = \mathrm{Index}T_0(L_0+1), \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1,$$

即

$$\dim L^2[1,\infty)/\mathrm{ran}T_0(L_\varepsilon+1) = \dim L^2[1,\infty)/\mathrm{ran}T_0(L_0+1),$$

$$\mathrm{nullity}T_1(L_\varepsilon+1) = \mathrm{nullity}T_1(L_0+1).$$

这样由 L_0 为极限点便可得

$$d(L+1) = \mathrm{nullity}T_1(L+1) = \mathrm{nullity}T_1(L_0+1) = d(L_0+1) = N.$$

于是 L 是极限点的. 由 $\mathscr{D}(T_0(L+1)) = \mathscr{D}(T_0(L_0+1))$ 知 $T_0(L)$ 分离, 利用 L 是极限点与定理 1.2.6 便可得 $T_1(L)$ 分离. 定理证毕.

最后, 通过一个反例来说明定理 5.4.4, 定理 5.4.5 中的条件 (2) 是不可少的. 先证明一条引理.

引理 5.4.20　设 $L \equiv \sum_{k=0}^{N}(-1)^k D^k p_k(x) D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上正则的微分算式, $p_k(x)$ 都是非负的 C^∞ 函数, 如果 L 属于极限点型, 则对任何 $f \in \mathscr{D}(T_1(L))$, $p_0^{\frac{1}{2}} f$ 都平方可积.

证明　由于 L 是极限点的, 所以最大算子与最小算子的定义域仅差紧支集的 C^∞ 函数, 因此只需对 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$ 证明结论即可.

当 $f \in \mathscr{D}(T_0(L))$ 时, 存在 $C_0^\infty(1,\infty)$ 中的序列 $\{f_n\}$, 使得在空间 $L^2[1,\infty)$ 中 $\{f_n\}$ 趋于 f, 而 $\{Lf_n\}$ 趋于 Lf. 由

$$\|Lf_n\|\,\|f_n\| \geqslant |(Lf_n, f_n)| = \sum_{k=0}^{N}\int_1^\infty p_k|D^k f_n|^2 \mathrm{d}x \geqslant \int_1^\infty p_0|f_n|^2 \mathrm{d}x$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\|Lf_n\|\,\|f_n\| = \|Lf\|\,\|f\|$$

① 这一定理涉及的概念颇多, 故从略.

便知, 存在常数 K, 使得对任意 $A>1$ 和自然数 n, 均有

$$\int_1^A p_0|f_n|^2\mathrm{d}x \leqslant K,$$

由 Riesz 定理, 存在 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{f_{n_k}\}$ 在 $[1,A]$ 上几乎处处收敛到 f, 所以在 $[1,A]$ 上,

$$\lim_{k\to\infty} p_0(x)|f_{n_k}(x)|^2 = p_0(x)|f(x)|^2, \quad \text{p.p.}$$

于是利用 Fatou 引理可得

$$\int_1^A p_0|f|^2\mathrm{d}x \leqslant K.$$

因为 A 是任意的, 故 $p_0^{\frac{1}{2}}f\in L^2[1,\infty)$.

定理 5.4.6　存在 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$, 使得微分算式

$$L\equiv -D^3x^{\alpha+6}D^3+\beta x^{\alpha}$$

在 $[1,\infty)$ 上不属于极限点型.

证明　只要在 $\mathscr{D}(T_1(L))$ 中找一个函数 f 使得 $x^{\frac{\alpha}{2}}f$ 不平方可积即可. 考虑方程 $Ly=0$ 的幂函数解, 显然 $Lx^{\lambda}=0$ 的充分必要条件是 λ 满足代数方程

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+\alpha+3)(\lambda+\alpha+2)(\lambda+\alpha+1)=\beta,$$

这里 λ 是一个复数, 取 $\lambda=-1+\mathrm{i}b$, 令

$$\theta_1(b)=\arg\lambda,\quad \theta_2(b)=\arg(\lambda-1),\quad \theta_3(b)=\arg(\lambda-2),$$

$$\theta_4(b,\alpha)=\arg(\lambda+\alpha+3),\quad \theta_5(b,\alpha)=\arg(\lambda+\alpha+2),\quad \theta_6(b,\alpha)=\arg(\lambda+\alpha+1).$$

如果能取到正数 b 和 $\alpha>1$ 使得 $\sum\limits_{j=1}^{6}\theta_j=2\pi$, 则 $x^{-1+\mathrm{i}b}$ 属于 $\mathscr{D}(T_1(L))$, 但由于 $\alpha-2>-1$, 故 $x^{\frac{\alpha}{2}}x^{-1+\mathrm{i}b}$ 不平方可积, 因此有正数 α,β 使微分算式 $L\equiv -D^3x^{\alpha+6}D+\beta x^{\alpha}$ 为非极限点型.

现在来证明存在上述的正数 b 和 $\alpha>1$. 由图 5.4 可知对固定的 α,

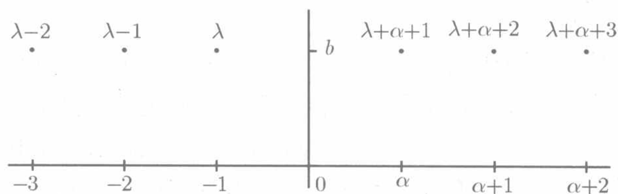


图 5.4

$$\lim_{b\to+\infty}\theta_1(b)=\lim_{b\to+\infty}\theta_2(b)=\lim_{b\to+\infty}\theta_3(b)=\frac{\pi}{2}+0,$$

$$\lim_{b\to+\infty}\theta_4(b,\alpha)=\lim_{b\to+\infty}\theta_5(b,\alpha)=\lim_{b\to+\infty}\theta_6(b,\alpha)=\frac{\pi}{2}-0.$$

所以可以取到正数 b_0, 使得

$$\theta_1(b_0)+\theta_2(b_0)+\theta_3(b_0)<2\pi,$$

$$\theta_1(b_0)+\theta_2(b_0)+\theta_3(b_0)+\theta_4(b,1)+\theta_5(b,1)+\theta_6(b,1)>2\pi.$$

但是

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\theta_4(b_0,\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\theta_5(b_0,\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\theta_6(b_0,\alpha)=+0,$$

当 α 充分大时, 使得

$$\theta_1(b_0)+\theta_2(b_0)+\theta_3(b_0)+\theta_4(b_0,\alpha)+\theta_5(b_0,\alpha)+\theta_6(b_0,\alpha)<2\pi,$$

这样由于 $\theta_4(b_0,\alpha)+\theta_5(b_0,\alpha)+\theta_6(b_0,\alpha)$ 是 α 的连续函数, 故必存在 $\alpha_0>1$, 使得

$$\theta_1(b_0)+\theta_2(b_0)+\theta_3(b_0)+\theta_4(b_0,\alpha_0)+\theta_5(b_0,\alpha_0)+\theta_6(b_0,\alpha_0)=2\pi.$$

定理证毕.

在 Kauffman 的文章中也讨论了条件 (2) 不成立时的情形, 这时如果再附加上别的条件仍然可保证微分算式的极限点性质. 他证明了下述定理: “设 $L\equiv\sum_{k=0}^{N}(-1)^kD^kp_k(x)D^k$ 是 $[1,\infty)$ 上的正则的微分算式, 其中, 不恒为零的 $p_k(x)$ 都是首项系数大于零的实幂幂函数的有限线性组合

$$p_k(x)=c_kx^{n(k)}+\text{低阶项}.$$

记

$$r=\max\{n(k)-2k\},\quad Q=\{k|n(k)-2k=r\},$$
$$R\equiv\sum_{k\in Q}(-1)^kc_kD^kx^{n(k)}D^k=\sum_{k\in Q}(-1)^kc_kD^kx^{r+2k}D^k.$$

若 $T_1(R)$ 分离, 则 L 属于极限点型且 $T_1(L)$ 分离.” 由此可以证明一切这类“多项式系数”的四阶微分算式都是极限点型的, 而且其最大算子还是分离的. 这是一个很漂亮的结果, 比之 A. Devinatz, P. W. Walker 和 A. D. Wood 利用渐近方法得到的某些结果要更好些. 有兴趣的读者可以进一步去阅读 Kauffman 文章 [16] 的第二部分.

附录　对称算子的自伴延拓的Calkin描述

并非所有对称算子都能延拓成为自伴算子.

例 1　设 $H=L^2[0,\infty)$, $\widetilde{T}$ 是由 $\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 生成的微分算子

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}(\widetilde{T})=C_0^\infty(0,\infty),\\&\widetilde{T}f=if',\quad \forall f\in\mathscr{D}(\widetilde{T}).\end{aligned}$$

(1) $\widetilde{T}$ 对称:

$$(\widetilde{T}f,g)=\int_0^\infty \mathrm{i}f'\overline{g}\mathrm{d}x=\int_0^\infty f(\overline{\mathrm{i}g'})\mathrm{d}x=(f,\widetilde{T}g),\quad \forall f,g\in\mathscr{D}(\widetilde{T}).$$

(2) 共轭算子 $\widetilde{T}^*$:

设 $h\in\mathscr{D}(\widetilde{T}^*)$, 对任何 $\beta>\alpha>0$, 对任何 ε, $\min\left\{\alpha,\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right\}>\varepsilon>0$, 令 $f_\varepsilon^{\alpha,\beta}=\rho_\varepsilon(x-\beta)-\rho_\varepsilon(x-\alpha)$, 这里 $\rho\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\rho(x)\geqslant 0$, $\rho(x)=\rho(-x)$, $\mathrm{supp}\rho\subset[-1,1]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\rho(x)\mathrm{d}x=1$, 而 $\rho_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon}\rho\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, 则 $f_\varepsilon^{\alpha,\beta}\in C_0^\infty(0,1)$, 取

$$g_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x)=\int_0^x f_\varepsilon^{\alpha,\beta}(t)\mathrm{d}t,$$

则 $g_\varepsilon^{\alpha,\beta}\in\mathscr{D}(\widetilde{T})$ 且

$$-1\leqslant g_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x)\leqslant 0,\quad g_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant\alpha-\varepsilon,\\-1, & \alpha+\varepsilon\leqslant x\leqslant\beta-\varepsilon,\\0, & x>\beta+\varepsilon.\end{cases}$$

由

$$(\widetilde{T}g_\varepsilon^{\alpha,\beta},h)=(g_\varepsilon^{\alpha,\beta},\widetilde{T}^*h)=\int_0^\infty g_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x)\overline{(\widetilde{T}^*h)(x)}\mathrm{d}x,$$
$$|g_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x)\overline{(\widetilde{T}^*h)(x)}|\leqslant|\overline{(\widetilde{T}^*h)(x)}|,$$

$\widetilde{T}^*h\in L^2[0,\infty)$, 所以 $\widetilde{T}^*h\in L[0,\alpha+\beta]$. 而 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}g_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x)\widetilde{T}^*h(x)=-\chi_{[\alpha,\beta]}(x)\widetilde{T}^*h(x)$, 所以在 $[0,\alpha+\beta]$ 上用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}(g_\varepsilon^{\alpha,\beta},\widetilde{T}^*h)=-\int_\alpha^\beta\overline{(\widetilde{T}^*h)(x)}\mathrm{d}x.$$

另一方面,

$$(\widetilde{T}g_\varepsilon^{\alpha,\beta},h)=\mathrm{i}\int_0^\infty f_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}x=\mathrm{i}\left(\int_0^\infty \rho_\varepsilon(x-\beta)\overline{h(x)}\mathrm{d}x-\int_0^\infty \rho_\varepsilon(x-\alpha)\overline{h(x)}\mathrm{d}x\right),$$

当 $\varepsilon\to+0$ 时, $\int_0^\infty \rho_\varepsilon(x-t)\overline{h(x)}\mathrm{d}x=\rho_\varepsilon*\overline{h}(t)$ 平均收敛到 $\overline{h}$, 所以选取一个趋于 0 的数列 $\{\varepsilon_n\}$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\rho_\varepsilon*\overline{h}(t)=\overline{h}(t)\ \text{几乎处处成立.}$$

改变 $\overline{h}$ 在一个零测度集上的值, 可以认为此等式点点成立. 那么

$$\lim_{\varepsilon\to0+}(\widetilde{T}g_\varepsilon^{\alpha,\beta},h)=\mathrm{i}(\overline{h(\beta)}-\overline{h(\alpha)}),$$

因此

$$-\int_\alpha^\beta\overline{(\widetilde{T}^*h)(x)}\mathrm{d}x=\mathrm{i}(\overline{h(\beta)}-\overline{h(\alpha)}),$$

$$\int_\alpha^\beta(\widetilde{T}^*h)(x)\mathrm{d}x=\mathrm{i}(h(\alpha)-h(\beta)),$$

这表示 $h\in AC_{loc}[0,\infty)$, 而

$$\mathrm{i}h'(x)=\widetilde{T}^*h(x).$$

反过来, $\forall g\in AC_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$, $g'\in L^2[0,\infty)$, 当 $f\in\mathscr{D}(\widetilde{T})$ 时便有

$$(\widetilde{T}f,g)=\int_0^\infty \mathrm{i}f'(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=-\int_0^\infty \mathrm{i}f(x)\overline{g'(x)}\mathrm{d}x=\int_0^\infty f(x)\overline{\mathrm{i}g'(x)}\mathrm{d}x,$$

故 $g\in\mathscr{D}(\widetilde{T}^*)$ 且 $T^*g=\mathrm{i}g'$. 这样便得

$$\mathscr{D}(\widetilde{T}^*)=\{h\in L^2[0,\infty)|h\in AC_{\mathrm{loc}}[0,\infty),h'\in L^2[0,\infty)\},$$
$$\widetilde{T}^*f=\mathrm{i}f',\quad \forall f\in\mathscr{D}(\widetilde{T}^*).$$

(3) $\widetilde{T}$ 没有自伴延拓:

由 (2) 知 $\widetilde{T}$ 不自伴. 如果 T 是 $\widetilde{T}$ 的自伴延拓, 则

$$\widetilde{T}\subset T=T^*.$$

而

$$T=T^*\subset\widetilde{T}^*,$$

$$\mathscr{D}(T)\subset\mathscr{D}(\widetilde{T}^*),$$

$\forall f,g\in\mathscr{D}(T)$, 应有

$$(Tf,g)=(f,Tg),$$

即

$$\int_0^\infty \mathrm{i}f'(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(x)\overline{\mathrm{i}g'(x)}\mathrm{d}x.$$

而

$$(Tf,g) = \mathrm{i}f'(x)\overline{g(x)}|_0^\infty + \int_0^\infty f(x)\overline{\mathrm{i}g'(x)}\mathrm{d}x,$$

所以

$$\mathrm{i}f\overline{g}|_0^\infty = 0,$$

即

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{i}f(x)\overline{g(x)} = \mathrm{i}f(0)\overline{g(0)}.$$

因为 $f,g\in\mathscr{D}(\widetilde{T}^*)$, 所以 $f,f',g,g'\in L^2[0,\infty)$, 由

$$(|f(x)|^2)' = (f(x)\overline{f(x)})' = f'(x)\overline{f(x)} + f(x)\overline{f'(x)},$$

知 $(|f(x)|^2)'\in[0,\infty)$, 于是由

$$|f(x)|^2 - |f(0)|^2 = \int_0^x (|f|^2)'\mathrm{d}t,$$

知 $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|^2=\alpha$, 但 $f\in L^2[0,\infty)$, 故 $\alpha=0$, 因此

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

这样, $\forall f\in\mathscr{D}(T)$, 便应有 $f(0)=0$!

那么, 对任意 $f\in\mathscr{D}(T), g\in\mathscr{D}(\widetilde{T}^*)$ 便有

$$(Tf,g) = \int_0^\infty \mathrm{i}f'(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \mathrm{i}f(x)\overline{g(x)}|_0^\infty + \int_0^\infty f(x)\overline{\mathrm{i}g'(x)}\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(x)\overline{\mathrm{i}g'(x)}\mathrm{d}x,$$

这表示 $g\in\mathscr{D}(T^*)$ 且 $T^*g=\mathrm{i}g'$. 因而 $\mathscr{D}(\widetilde{T}^*)\subset\mathscr{D}(T^*)=\mathscr{D}(T)$, 这是不可能的, 所以 $\widetilde{T}$ 没有自伴延拓.

什么样的对称算子有自伴延拓? 自伴延拓怎样找呢?

绝大多数泛函分析的教科书或专著在讨论对称算子自伴延拓时, 都采用 1930 年 J. von Neumann 的描述, 即证明具有相等亏指数的对称算子 A 有自伴延拓, 且 A 的自伴延拓与它的亏子空间 K_+, K_- 间的酉算子可以建立一个一一对应关系. 这样当 $\dim K_+ = \dim K_- < \infty$ 时, A 的自伴延拓便可以与 $K_+\to K_-$ 的酉变换 (变换矩阵为酉矩阵) 建立起一个一一对应. 这种描述用来讨论微分方程和数学物理中常碰到的对称微分算子的自伴延拓并不方便, 因为这个描述并没有给出自伴延拓定义域中的元素在边界上的特征, 而处理微分方程问题时, 很自然地希望自伴延拓能与边

界条件联系起来. 1939 年 Calkin 的文章 (*Abstract symmetric boundary conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. 45(1939), 364-442.) 便是从边界条件角度去刻画自伴延拓的定义域的.

引理 1　设 T 为闭对称算子, $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, 则 $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$, $\mathrm{ran}(\lambda I - T)$ 为闭子空间且

$$H = \mathrm{ran}(\lambda I - T) \oplus \ker(\overline{\lambda} I - T^*) = \mathrm{ran}(\overline{\lambda} I - T) \oplus \ker(\lambda I - T^*).$$

证明　因为

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - T)x\|^2 &= (\lambda x - Tx, \lambda x - Tx)\\ &= |\lambda|^2\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\lambda(x, Tx) + \|Tx\|^2\\ &\geqslant |\mathrm{Im}\lambda|^2\|x\|^2,\end{aligned}$$

所以 $\ker(\lambda I - T) = \{0\}, \mathrm{ran}(\lambda I - T)$ 为闭子空间, 从而引理成立.

定义 1　设 T 对称, 称 $K_+ = \ker(T^* - \mathrm{i}I), K_- = \ker(T^* + \mathrm{i}I)$ 为 T 的亏子空间, 称 $d_+ = \dim K_+, d_- = \dim K_-$ 为 T 的亏指数.

引理 2(John von Neumann 分解)　设 T 闭对称, 则 $\mathscr{D}(T^*) = \mathscr{D}(T) \oplus K_+ \oplus K_-$.

证明　(1) 分解的存在性.

对任意 $x \in \mathscr{D}(T^*), (T^* - \mathrm{i}I)x$ 有意义, 因为由引理 1, $H = \mathrm{ran}\ (T - \mathrm{i}I) \oplus \ker(T^* + \mathrm{i}I)$, 所以存在 $x_0 \in \mathscr{D}(T), x_2 \in K_-$, 使得

$$(T^* - \mathrm{i}I)x = (T - \mathrm{i}I)x_0 + x_2.$$

由于 $x_0 \in \mathscr{D}(T^*)$, 而 $T^*x_2 = -\mathrm{i}x_2$, 所以

$$x_2 = -\frac{1}{\mathrm{i}}T^*x_2 = \mathrm{i}T^*x_2, \quad Tx_0 = T^*x_0.$$

前式可改写为

$$T^*\left(x - x_0 - \frac{\mathrm{i}}{2}x_2\right) = \mathrm{i}x - \mathrm{i}x_0 + \frac{x_2}{2} = \mathrm{i}\left(x - x_0 - \frac{\mathrm{i}}{2}x_2\right),$$

这表示 $x - x_0 - \frac{\mathrm{i}}{2}x_2 \in K_+$, 于是

$$x = x_0 + \left(x - x_0 - \frac{\mathrm{i}}{2}x_2\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}x_2.$$

(2) 分解的唯一性.

若 $0 = x_0 + x_1 + x_2, x_0 \in \mathscr{D}(T), x_1 \in K_+, x_2 \in K_-$, 则

$$\begin{aligned}0 &= (T^* - \mathrm{i}I)(x_0 + x_1 + x_2) \\ &= (T - \mathrm{i}I)x_0 + (T^* - \mathrm{i}I)x_2 \\ &= (T - \mathrm{i}I)x_0 - 2\mathrm{i}x_2,\end{aligned}$$

而

$$H = \mathrm{ran}\ (T - \mathrm{i}I) \oplus \ker(T^* + \mathrm{i}I),$$

所以 $x_2 = 0$. 同理, 两边作用 $T^* + \mathrm{i}I$ 可得 $x_1 = 0$, 最后 $x_0 = 0$, 即分解唯一.

推论 1　设 T 闭对称算子. S 为 T 的延拓, 满足 $T \subset S \subset T^*$, 则存在 $K_+ \oplus K_-$ 的子空间 K, 使得 $\mathscr{D}(S) = \mathscr{D}(T) \oplus K$.

证明　令

$$K = \{z \in K_+ \oplus K_- | \exists x \in \mathscr{D}(S) \text{ 及 } y \in \mathscr{D}(T), \text{ 使得 } x = y + z\},$$

容易验证 K 是 $K_+ \oplus K_-$ 的线性子空间, 从而 $\{0\} \subset K \cap \mathscr{D}(T) \subset (K_+ \oplus K_-) \cap \mathscr{D}(T) = \{0\}$, 所以 $\mathscr{D}(T) \oplus K \subset \mathscr{D}(S)$. 而对任意 $x \in \mathscr{D}(S) \subset \mathscr{D}(T^*)$, 由引理 2, 有 $x = x_0 + x_1 + x_2$, 其中, $x_0 \in \mathscr{D}(T), x_1 \in K_+, x_2 \in K_-$, 于是 $x_1 + x_2 \in K$, 即 $\mathscr{D}(T) \oplus K \supset \mathscr{D}(S)$, 所以

$$\mathscr{D}(S) = \mathscr{D}(T) \oplus K.$$

定义 2　设 T 对称, 令

$$\langle x, y \rangle = (T^*x, y) - (x, T^*y), \quad \forall x, y \in \mathscr{D}(T^*),$$

则 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $\mathscr{D}(T^*) \times \mathscr{D}(T^*)$ 上双线性函数 (对第一变元线性, 第二变元共轭线性). 此外还有 $\langle x, y \rangle = -\overline{\langle y, x \rangle}$.

例 2　设 $H = L^2[0, 1]$,

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in H | f \in AC[0, 1], f' \in H, f(0) = f(1) = 0\},$$

$$Tf = \mathrm{i}f', \quad \forall f \in \mathscr{D}(T),$$

则 T 是闭对称算子, 类似例 1, 可算得

$$\mathscr{D}(T^*) = \{f \in H | f \in AC[0, 1], f' \in H\}.$$

由于 $\mathrm{e}^{\pm x} \in \mathscr{D}(T^*) \setminus \mathscr{D}(T)$, $T \neq T^*$. 下面求 T 的自伴延拓.

T 不自伴, 因为其边界条件太严, 而 T^* 中条件又太宽! 对任意 $f, g \in \mathscr{D}(T^*)$, 有

$$\langle f, g \rangle = (T^*f, g) - (f, T^*g)$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^1 \mathrm{i}f'\overline{g}\mathrm{d}x - \int_0^1 f\overline{\mathrm{i}g'}\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i}f\overline{g}|_0^1 \\ &= \mathrm{i}(f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)}).\end{aligned}$$

由此式可找出 T 的自伴延拓的适当边界条件. 设 S 为 T 的自伴延拓, 则 $T \subset S = S^* \subset T^*$, 对任意 $f, g \in \mathscr{D}(S)$, 由 S 自伴, $(Sf, g) = (f, Sg)$, 所以

$$\langle f, g\rangle = 0,$$

取 $g = f \in \mathscr{D}(S) \backslash \mathscr{D}(T)$, 则 $|f(1)|^2 = |f(0)|^2$(这时 $f(0) \neq 0$). 于是存在 $\alpha(|\alpha| = 1)$, 使得 $f(1) = \alpha f(0)$.

下证任意的 $g \in \mathscr{D}(S)$ 都满足这一边界条件.

由 S 自伴,

$$\langle f, g\rangle = \mathrm{i}(f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)}) = 0,$$

即 $\mathrm{i}(\alpha\overline{g(1)} - \overline{g(0)}) = 0$, 所以 $\overline{g(1)} = \overline{\alpha g(0)}$, 即 g 满足边界条件 $g(1) = \alpha g(0)$. 于是

$$\mathscr{D}(S) = \{f \in \mathscr{D}(T^*) | f(1) = \alpha f(0)\}, \quad 对某个\ \alpha(|\alpha| = 1).$$

因为 $S \subset T^*$, 所以 $Sf = \mathrm{i}f'(\forall f \in \mathscr{D}(S))$. 若令 $T_\alpha = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\mathscr{D}(T_\alpha) = \{f \in \mathscr{D}(T^*) | f(1) = \alpha f(0), |\alpha| = 1\},$$

则 $S = T_\alpha$. 反之, 对任意 $\alpha, |\alpha| = 1, T_\alpha$ 也是 T 的一个自伴延拓 (可以证明 $\{T_\alpha \| \alpha\| = 1\}$ 为全部自伴延拓).

引理 3 设 T 对称, $x \in \mathscr{D}(T^*)$, 则以下 3 条等价:

(1) $x \in \mathscr{D}(\overline{T})$;

(2) $\langle x, y\rangle = 0, \forall y \in \mathscr{D}(T^*)$;

(3) $\langle x, y\rangle = 0, \forall y \in K_+ \oplus K_-$.

若 $K_+ \oplus K_-$ 为有限维空间, $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为其基, 则 (1)~(3) 与

(4) $\langle x, x_j\rangle = 0 (j = 1, \cdots, n)$

等价.

证明 (1) ⇒ (2) 对任意 $y \in \mathscr{D}(T^*)$, 有

$$\langle x, y\rangle = (T^*x, y) - (x, T^*y) = (\overline{T}x, y) - (x, \overline{T}^*y) = 0.$$

(2) ⇒ (3) 显然.

(3) ⇒ (2) 对任意 $y \in \mathscr{D}(T^*) = \mathscr{D}(\overline{T}^*)$, 有 $y = y_0 + \widetilde{y}$, 其中, $y_0 \in \mathscr{D}(\overline{T}), \widetilde{y} \in K_+ \oplus K_-$,

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x, y_0 + \widetilde{y}\rangle = \langle x, y_0\rangle + \langle x, \widetilde{y}\rangle = \langle x, y_0\rangle = (T^*x, y_0) - (x, T^*y_0)\\ &= (\overline{T}^*x, y_0) - (x, \overline{T}y_0) = 0,\end{aligned}$$

所以 (2) 成立.

(2) ⇒ (1) 若 $x \in \mathscr{D}(T^*), \forall y \in \mathscr{D}(T^*)$ 有 $\langle x, y\rangle = 0$, 则 $(T^*x, y) = (x, T^*y)$, 所以 $x \in \mathscr{D}(T^{**}) = \mathscr{D}(\overline{T})$.

这条引理给出了对称算子最小闭延拓的刻画

$$\mathscr{D}(\overline{T}) = \{x \in \mathscr{D}(T^*) | \langle x, y\rangle = 0, y \in \mathscr{D}(T^*)\} = \{x \in \mathscr{D}(T^*) | \langle x, y\rangle = 0, y \in K_+ \oplus K_-\}.$$

定义 3 设 K 为 $K_+ \oplus K_-$ 的子空间, 其共轭 K^* 定义为

$$K^* = \{x \in K_+ \oplus K_- | \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in K\},$$

若 $K \subset K^*$, 则称 K 对称 (即对任意 $x, y \in K, \langle x, y\rangle = 0$). 若 $K = K^*$, 则称 K 自伴.

引理 4 设 T 闭对称, T_1 是 T 的延拓满足 $T \subset T_1 \subset T^*$, 则存在 $K \subset K_+ \oplus K_-$, 使得 $\mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T) \oplus K$ 且 T_1 对称 (自伴) 当且仅当 K 对称 (自伴).

证明 由推论 1, 存在 $K \subset K_+ \oplus K_-$, 使得 $\mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T) \oplus K$.

(1) T_1^* 的定义域的刻画:

由于 $T \subset T_1 \subset \overline{T_1} \subset T^*$, 所以 $\overline{T} = T^{**} \subset \overline{T_1}^* \subset T^*$, 从而

$$\begin{aligned}x \in \mathscr{D}(T_1^*) &\Leftrightarrow x \in \mathscr{D}(T^*) \text{ 且 } (T_1y, x) = (y, T_1^*x)(\forall y \in \mathscr{D}(T_1))\\ &\Leftrightarrow x \in \mathscr{D}(T^*) \text{ 且 } (T^*y, x) = (y, T^*x)(\forall y \in \mathscr{D}(T_1)),\end{aligned}$$

故

$$x \in \mathscr{D}(T_1^*) \Leftrightarrow x \in \mathscr{D}(T^*) \text{ 且 } \langle x, y\rangle = 0, \quad \forall y \in \mathscr{D}(T_1),$$

即

$$\mathscr{D}(T_1^*) = \{x \in \mathscr{D}(T^*) | \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in \mathscr{D}(T_1)\}.$$

(2) T_1 对称当且仅当 K 对称.

⇒ 对任意 $u, v \in K$, 有 $x_0, y_0 \in \mathscr{D}(T)$, 使 $x = x_0 + u, y = y_0 + v \in \mathscr{D}(T_1)$. 由 T_1 的对称性,

$$\langle x, y\rangle = (T^*x, y) - (x, T^*y) = (T_1x, y) - (x, T_1y) = 0,$$

由引理 3,

$$0 = \langle x, y\rangle = \langle x_0 + u, y_0 + v\rangle = \langle x_0, y_0\rangle + \langle x_0, v\rangle + \langle u, y_0\rangle + \langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle,$$

所以 K 对称.

$\Leftarrow$　设 K 对称, 对任意 $x, y \in \mathscr{D}(T_1)$, 设 $x = x_0 + u, y = y_0 + v$, 其中, $x_0, y_0 \in \mathscr{D}(T), u, v \in K$, 则

$$\begin{aligned}(T_1x, y) - (x, T_1y) &= (T^*x, y) - (x, T^*y) = \langle x, y\rangle. \\ &= \langle x_0, y_0\rangle + \langle x_0, v\rangle + \langle u, y_0\rangle + \langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle = 0,\end{aligned}$$

于是 T 对称.

(3) T_1 自伴当且仅当 K 自伴.

由推论 1, 设 $\mathscr{D}(T_1^*) = \mathscr{D}(T) \oplus L$, 由于

$$\mathscr{D}(T_1^*) = \{x \in \mathscr{D}(T^*) | \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in \mathscr{D}(T_1)\} = \{x \in \mathscr{D}(T^*) | \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in K\},$$

所以

$$\begin{aligned} x \in L &\Leftrightarrow \text{存在 } z = z_0 + x \in \mathscr{D}(T_1^*), \text{ 其中, } z_0 \in \mathscr{D}(T) \\ &\Leftrightarrow \text{存在 } z_0 \in \mathscr{D}(T), \text{ 使得 } \langle z_0 + x, y\rangle = 0 (\forall y \in K) \\ &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0 (\forall y \in K) \\ &\Leftrightarrow x \in K^*, \end{aligned}$$

于是 $L = K^*$, $\mathscr{D}(T_1^*) = \mathscr{D}(T) \oplus K^*$. 这样,

$$\begin{aligned} T_1 \text{ 自伴 } &\Leftrightarrow \mathscr{D}(T_1^*) = \mathscr{D}(T_1) \\ &\Leftrightarrow K^* = K \\ &\Leftrightarrow K \text{ 自伴}. \end{aligned}$$

引理 4 说明, 对称算子 T 有没有自伴延拓和如何找出自伴延拓的问题可以归结为 $K_+ \oplus K_-$ 中有没有自伴子空间和如何找出自伴子空间问题. 当 $\dim K_+ \oplus K_- < \infty$ 时, 这个问题可以用有限维空间方法去解决. 对于由对称微分算式定义的对称微分算子来说, 其亏子空间是由微分方程线性无关的平方可积解张成的, 当然是有限维的.

引理 5　设 $x, y \in K_+ \oplus K_-, x = x_+ + x_-, y = y_+ + y_-$, 则

$$\langle x, y\rangle = 2\mathrm{i}((x_+, y_+) - (x_-, y_-)),$$

$$\langle x, x\rangle = 2\mathrm{i}(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2).$$

证明

$$\langle x, y\rangle = (T^*x, y) - (x, T^*y)$$

$$
\begin{aligned}
&= (T^*(x_+ + x_-), y_+ + y_-) - (x_+ + x_-, T^*(y_+ + y_-)) \\
&= \mathrm{i}(x_+ - x_-, y_+ + y_-) - (x_+ + x_-, \mathrm{i}y_+ - \mathrm{i}y_-) \\
&= 2\mathrm{i}((x_+, y_+) - (x_-, y_-)),
\end{aligned}
$$

从而

$$\langle x, x\rangle = 2\mathrm{i}(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2).$$

推论 2　若 $K \subset K_+ \oplus K_-$ 对称, $x \in K$ 可表示为 $x = x_+ + x_-$, 则

$$\|x_+\| = \|x_-\|.$$

引理 6　设对称算子 T 有有限的亏指数 (d_+, d_-), $K \subset K_+ \oplus K_-$ 为维数为 n 的子空间, 则 $\dim K^* = d_+ + d_- - n$.

证明　设 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为 K 的一组基, 则

$$K^* = \{x \in K_+ \oplus K_- | \langle x, x_i\rangle = 0, i = 1, \cdots, n\}.$$

定义 $x_i^*(i = 1, \cdots, n)$ 如下:

$$x_i^*(x) = \langle x, x_i\rangle, \quad \forall x \in K_+ \oplus K_-,$$

则 x_i^* 是 $K_+ \oplus K_-$ 上线性泛函 $(i = 1, \cdots, n)$ 且线性无关. 事实上, 若 $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^* = 0$, 有

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^*\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle x, x_j\rangle = \left\langle x, \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} x_j\right\rangle, \quad \forall x \in K_+ \oplus K_-.$$

设

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} x_j = u_+ + u_-, u_\pm \in K_\pm,$$

则

$$\langle x, u_+ + u_-\rangle = 0, \quad \forall x \in K_+ \oplus K_-,$$

从而

$$\langle u_+, u_+ + u_-\rangle = 0.$$

同样,

$$\langle u_-, u_+ + u_-\rangle = 0,$$

所以

$$2\mathrm{i}\|u_+\|^2 = 0, \quad 2\mathrm{i}\|u_-\|^2 = 0,$$

因此 $u_+ = u_- = 0$, 于是

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} x_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0, \quad j = 1, \cdots, n.$$

所以 $x_1^*, \cdots, x_n^*$ 线性无关. 这时,

$$K^* = \{x \in K_+ + K_- | x_i^*(x) = 0, i = 1, \cdots, n\}.$$

下证 $\dim K^* = d_+ + d_- - n$ (参见 Halmos “有限维向量空间”).

事实上, 设 $d = d_+ + d_-$, 将 $\{x_1^*, \cdots, x_n^*\}$ 扩充为 $(K_+ \oplus K_-)^{\#}(K_+ \oplus K_-$ 的线性泛函空间, 即代数对偶空间) 的基 $\{x_1^*, \cdots, x_n^*, x_{n+1}^*, \cdots, x_d^*\}$. 设 $\{y_1, \cdots, y_d\}$ 是相应 $K_+ \oplus K_-$ 中的对偶基, 即 $x_j^*(y_k) = \delta_{jk}(j, k = 1, \cdots, d)$, 所以 $y_{n+1}, \cdots, y_d \in K^*$, 从而

$$\dim K^* \geqslant d - n = d_+ + d_- - n.$$

另一方面, 对任意 $x \in K^*$, 有 $x = \sum_{j=1}^{d} a_j y_j$, 于是

$$x_k^*(x) = \sum_{j=1}^{d} a_j x_k^*(y_j) = a_k, \quad k = 1, \cdots, d.$$

而由 K^* 定义知

$$x_k^*(x) = \langle x, x_k \rangle = 0, \quad \forall x \in K, k = 1, \cdots, n,$$

所以 $a_k = 0, k = 1, \cdots, n$, 于是 $x = \sum_{j=n+1}^{d} a_j y_j$, 即 $x \in \mathrm{span}\{y_{n+1}, \cdots, y_d\}$, 所以

$$\dim K^* = d_+ + d_- - n.$$

推论 3　设闭对称算子 T 有有限亏指数 $d = d_- = d_+, K \subset K_+ \oplus K_-$ 自伴, 则 $\dim K = d$.

定理 1　设 T 是亏指数有限的对称算子, 则 T 有自伴延拓的充要条件为 $d_+ = d_-$.

证明　$\Leftarrow$　设 $d_+ = d_- = d, \{x_1^+, \cdots, x_d^+\}$ 与 $\{x_1^-, \cdots, x_d^-\}$ 分别为 K_+ 和 K_- 的标准正交基. 令

$$x_j = x_j^+ + x_j^-, \quad j = 1, \cdots, d,$$

设 $K = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_d\}$.

(1) $\{x_1, \cdots, x_d\}$ 线性无关.

设 $\sum\limits_{j=1}^{d} \alpha_j x_j = 0$, 则

$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j x_j^+ = -\sum_{j=1}^{d} \alpha_j x_j^- \in K_+ \cap K_-,$$

所以

$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j x_j^{\pm} = 0,$$

因此 $\alpha_j = 0, j = 1, \cdots, d$. 于是 $\{x_1, \cdots, x_d\}$ 线性无关.

(2) K 对称.

对任意 $x, y \in K$, 则

$$x = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j x_j, \quad y = \sum_{j=1}^{d} \beta_j x_j,$$

于是

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \sum_{j,k=1}^{d} \alpha_j \overline{\beta_k} \langle x_j, x_k \rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{d} \alpha_j \overline{\beta_k} \langle x_j^+ + x_j^-, x_k^+ + x_k^- \rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{d} \alpha_j \overline{\beta_k} 2\mathrm{i}((x_j^+, x_k^+) - (x_j^-, x_k^-)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

所以 K 对称.

(3) $\dim K^* = 2d - \dim K = d$. 因为 K 对称, 所以 $K \subset K^*$, 从而 $K = K^*$, 即 K 自伴, $\mathscr{D}(T) \oplus K$ 为自伴延拓的定义域.

$\Rightarrow$　设 $K \subset K_+ \oplus K_-$ 为自伴子空间. $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为 K 的一组基,

$$x_j = x_j^+ + x_j^-, \quad j = 1, \cdots, n, x_j^{\pm} \in K_{\pm},$$

则 $\{x_j^+\}_{j=1}^n$ 线性无关. 这是因为若 $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^+ = 0$, 由推论 3 知 $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^- = 0$, 因而 $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$, 所以 $\alpha_j = 0, j = 1, \cdots, n$.

同理, $\{x_j^-\}_{j=1}^n$ 线性无关, 于是 $n \leqslant \min\{d_+, d_-\}$.

另一方面, 由 K 自伴, $K = K^*$. 由引理 6, $n = \dim K^* = d_+ + d_- - \dim K = d_+ + d_- - n$, 所以 $2n = d_+ + d_-$, 又因为 $n \leqslant d_-, n \leqslant d_+$, 于是 $d_+ = d_- = n$.

定理 2(von Neumann 描述)　设闭对称算子 T 的亏指数 $d_+ = d_- = d < \infty$, 则 T 的自伴延拓与 $K_+ \to K_-$ 的酉算子之间有一个一一对应.

证明　(1) 设 S 是 T 的自伴延拓, 则

$$\mathscr{D}(S) = \mathscr{D}(T) \oplus K, \quad K = K^*.$$

对任意的 $x = x_+ + x_- \in K, x_\pm \in K_\pm$, 由推论 2, 有 $\|x_+\| = \|x_-\|$. 令

$$\mathscr{D}(U) = \{x_+ \in K_+ | \exists x_- \in K_-, \text{ s.t. } x_+ + x_- \in K\}, \quad Ux_+ = x_-, \forall x_+ \in \mathscr{D}(U),$$

则 $\mathscr{D}(U)$ 是 K_+ 的子空间, U 为 $\mathscr{D}(U) \longrightarrow K_-$ 线性等距算子.

下证 $\mathscr{D}(U) = K_+$. 若不然, 则有 $0 \neq u \in K_+$, 使得 $u \perp \mathscr{D}(U)$, 这时 $u \notin K$, 所以 $u \notin \mathscr{D}(S)$. 对任意的 $x \in \mathscr{D}(S)$, 设

$$x = x_0 + x_+ + x_-, \quad x_0 \in \mathscr{D}(T), x_\pm \in K_\pm, x_+ + x_- \in K,$$

所以

$$\begin{aligned} \langle x, u\rangle &= \langle x_0 + x_+ + x_-, u\rangle = \langle x_+ + x_-, u\rangle \\ &= 2\mathrm{i}((x_+, u) - (x_-, 0)) = 2\mathrm{i}(x_+, u) = 0, \end{aligned}$$

因而

$$(T^*x, u) = (x, T^*u),$$

即

$$(Sx, u) = (x, T^*u),$$

所以 $u \in \mathscr{D}(S^*) = \mathscr{D}(S)$, 矛盾! 于是

$$\mathscr{D}(S) = \{x_0 + x_+ + Ux_+ | x_0 \in \mathscr{D}(T), x_+ \in K_+\},$$

$$\begin{aligned} S(x_0 + x_+ + Ux_+) &= T^*(x_0 + x_+ + Ux_+) \\ &= T^*x_0 + T^*x + T^*Ux_+ \\ &= Tx_0 + \mathrm{i}x_+ + (-\mathrm{i}Ux_+) \\ &= Tx_0 + \mathrm{i}x_+ - \mathrm{i}Ux_+. \end{aligned}$$

(2) 设 $U: K_+ \to K_-$ 是酉算子. 令

$$K = \{x_+ + Ux_+ | x_+ \in K_+\}.$$

(i) K 对称.

$$\langle x_+ + Ux_+, y_+ + Uy_+\rangle = 2\mathrm{i}((x_+, y_+) - (Ux_+, Uy_+)) = 0,$$

所以 K 对称.

(ii) K 自伴.

设 $z \in K^*, z = z_+ + z_-, z_\pm \in K_\pm$, 则

$$\begin{aligned}
0 &= \langle z, x_+ + Ux_+\rangle \\
&= \langle z_+ + z_-, x_+ + Ux_+\rangle \\
&= 2\mathrm{i}((z_+, x_+) - (z_-, Ux_+)) = 2\mathrm{i}((Uz_+, Ux_+) - (z_-, Ux_+)) \\
&= 2\mathrm{i}(Uz_+ - z_-, Ux_+), \quad \forall x_+ \in K_+,
\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{ran}U = K_-$, 所以存在 $\widetilde{x_+} \in K_+$, 使得 $U\widetilde{x_+} = Uz_+ - z_-$, 于是在上式中取 $x_+ = \widetilde{x_+}$, 则 $2\mathrm{i}\|Uz_+ - z_-\|^2 = 0$, 所以 $Uz_+ = z_-$, 即 $z \in K$, 从而 $K = K^*$. 与 U 对应的自伴延拓为 T_1,

$$\mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T) \oplus K = \{x_0 + x_+ + Ux_+ | x_0 \in \mathscr{D}(T), x_+ \in K_+\},$$

$$T_1(x_0 + x_+ + Ux_+) = Tx_0 + \mathrm{i}x_+ - \mathrm{i}Ux_+.$$

为了便于讨论对称微分算子的自伴延拓, 再找出自伴延拓定义域的抽象边界条件刻画, 即 Calkin 描述.

定义 4 设 $\{x_1, \cdots, x_k\} \subset \mathscr{D}(T^*), x_j = x_{j0} + z_j, x_{j0} = \mathscr{D}(\overline{T}), z_j \in K_+ \oplus K_-$. 如果 $\{z_1, \cdots, z_k\}$ 线性无关, 则称 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ 模 $\mathscr{D}(T)$ 线性无关.

定理 3 $\mathscr{D}(T^*)$ 中元素 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ 模 $\mathscr{D}(T)$ 线性无关的充要条件为存在 $\{y_1, \cdots, y_k\} \subset \mathscr{D}(T^*)$, 使得 $\det(\langle x_i, y_j\rangle) \neq 0$.

证明 设

$$x_j = x_{j0} + z_j, \quad x_{j0} \in \mathscr{D}(\overline{T}), z_j \in K_+ \oplus K_-, \quad j = 1, \cdots, k.$$

(1) $\Rightarrow$ 设 $\{z_1, \cdots, z_k\}$ 线性无关, 令

$$z_j^*(x) = \langle x, z_j\rangle, \quad \forall x \in K_+ \oplus K_-,$$

则 $z_1^*, \cdots, z_k^*$ 为 $(K_+ \oplus K_-)^\#$ 里的线性泛函且线性无关. 设 $d = d_+ + d_- = \dim(K_+ \oplus K_-) < \infty$. 将 $\{z_1^*, \cdots, z_k^*\}$ 扩充成 $(K_+ \oplus K_+)^\#$ 的基 $\{z_1^*, \cdots, z_k^*, z_{k+1}^*, \cdots, z_d^*\}$, 而 $K_+ \oplus K_-$ 相应的对偶基为 $\{y_1, \cdots, y_d\}$, 则

$$\langle x_i, y_j\rangle = \langle x_{i0} + z_i, y_j\rangle = \langle z_i, y_j\rangle = -\overline{\langle y_j, z_i\rangle} = -\overline{z_i^*(y_j)} = -\delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, k,$$

则

$$\det(\langle x_i, y_j\rangle) = \begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^k \neq 0.$$

(2) 设存在 $\{y_1, \cdots, y_k\} \subset \mathscr{D}(T^*)$, 使得 $\det(\langle x_i, y_j\rangle) \neq 0$. 设

$$\langle x_i, y_j\rangle = \langle z_i, y_j\rangle, \quad i, j = 1, \cdots, k.$$

若 $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i z_i = 0$, 则

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_j, y_j \right\rangle = 0, \quad j = 1, \cdots, k,$$

即

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle z_i, y_j\rangle = 0, \quad j = 1, \cdots, k.$$

而

$$\det(\langle z_i, y_j\rangle) = \det(\langle x_i, y_j\rangle) \neq 0,$$

所以 $\alpha_i = 0, i = 1, \cdots, k$, $\{z_i\}_{i=1}^k$ 线性无关, $\{x_i\}$ 模 $\mathscr{D}(T)$ 线性无关.

定义 5　设 T 为对称算子, 若 $\overline{T}$ 自伴, 则称 T 为本性自伴的.

定理 4　对称算子为本性自伴的充要条件是 $d_+ = d_- = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ran}(T \pm \mathrm{i}I)$ 稠.

证明　$\Rightarrow$　若 $\overline{T}$ 自伴, 则 $\ker(\overline{T}^* \pm \mathrm{i}I) = \{0\}$, 即 $d_+ = d_- = 0$.

$\Leftarrow$　由 J. von Neumann 分解 $\mathscr{D}(T^*) = \mathscr{D}(\overline{T})$, 所以 $\overline{T}^* = T^* = \overline{T}$, 于是 T 本性自伴.

推论 4　对称算子 T 本性自伴的充要条件是 T 有唯一的自伴延拓.

证明　$\Rightarrow$　设 S 为 T 的自伴延拓, 则 $T \subset S = S^* \subset T^* = \overline{T}^* = \overline{T}$, 而 $\overline{T} \subset S$(因为 S 闭) 所以 $S = \overline{T}$.

$\Leftarrow$　若 T 有唯一自伴延拓, 则 $d_+ = d_- = 0$, 否则 $K_+ \to K_-$ 有无穷多个酉算子, T 就有无穷多个自伴延拓.

定理 5 (Calkin 描述)　设 T 为对称算子, $d_+ = d_- = d < \infty$.

(1) 若 $d = 0$, 则 T 有唯一自伴延拓 $\overline{T}$;

(2) 若 $d > 0$, 设 $\{x_1, \cdots, x_d\} \subset \mathscr{D}(T^*)$ 模 $\mathscr{D}(T)$ 线性无关且 $\langle x_i, x_j\rangle = 0, i, j = 1, \cdots, d$, 记

$$\mathscr{D} = \{x \in \mathscr{D}(T^*) | \langle x, x_i\rangle = 0, i = 1, \cdots, d\},$$

则 $T^*|_{\mathscr{D}}$ 为 T 的自伴延拓. 反之, 若 T_1 是 T 的自伴延拓, 则存在 $\{z_1,\cdots,z_d\}\subset\mathscr{D}(T^*)$, 它们模 $\mathscr{D}(T)$ 线性无关且 $\langle z_i,z_j\rangle=0,i,j=1,\cdots,d$, 使得

$$\mathscr{D}(T_1)=\{x\in\mathscr{D}(T^*)|\langle x,z_j\rangle=0,j=1,\cdots,d\}.$$

证明　(2) 设

$$x_i=x_{i0}+z_i,\quad x_{i0}\in\mathscr{D}(\overline{T}),\quad i=1,\cdots,d,\quad z_i\in K_+\oplus K_-$$

且 $z_1,\cdots,z_d$ 线性无关, 令

$$K=\operatorname{span}\{z_1,\cdots,z_d\},$$

则 $\dim K=d$, 而且 K 对称.

事实上,

$$0=\langle x_i,x_j\rangle=\langle x_{i0}+z_i,x_{j0}+z_j\rangle=\langle z_i,z_j\rangle,\quad i,j=1,\cdots,d,$$

而

$$\dim K^*=d_++d_--\dim K=2d-d=d,$$

所以 $K=K^*$, K 自伴. 于是 $T^*|_{\mathscr{D}(\overline{T})+K}$ 是自伴延拓.

下证 $\mathscr{D}(\overline{T})+K=\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}x\in\mathscr{D}(\overline{T})\oplus K&\Leftrightarrow x=x_0+z(x_0\in\mathscr{D}(\overline{T}),z\in K)\\&\Leftrightarrow x=x_0+\sum_{i=1}^d\alpha_iz_i(x_0\in\mathscr{D}(\overline{T}))\\&\Leftrightarrow x\in\mathscr{D}(T^*),\langle x,z_i\rangle=0,i=1,\cdots,d\\&\Leftrightarrow x\in\mathscr{D}(T^*),\langle x,x_i\rangle=0,i=1,\cdots,d\\&\Leftrightarrow x\in\mathscr{D},\end{aligned}$$

即 $T^*|_{\mathscr{D}}=T^*|_{\mathscr{D}(\overline{T})+K}$.

反之, 设 T_1 为 T 的自伴延拓, 则

$$\mathscr{D}(T_1)=\mathscr{D}(\overline{T})+K,\quad K\subset K_+\oplus K_-,\quad K=K^*.$$

因而, 由推论 3, $\dim K=d$. 设 $\{z_1,\cdots,z_d\}$ 为 K 的基, 则 $\{z_1,\cdots,z_d\}$ 模 $\mathscr{D}(T)$ 线性无关且

$$\langle z_i,z_j\rangle=0,\quad i,j=1,\cdots,d.$$

而

$$\begin{aligned}x \in \mathscr{D}(T_1) &\Leftrightarrow x = x_0 + z, x_0 \in \mathscr{D}(\overline{T}), z \in K \\ &\Leftrightarrow x = x_0 + z, x_0 \in \mathscr{D}(\overline{T}), \langle z, z_i \rangle = 0, i = 1, \cdots, d \\ &\Leftrightarrow \langle x, z_i \rangle = 0, i = 1, \cdots, d \\ &\Leftrightarrow x \in \mathscr{D},\end{aligned}$$

所以 $T_1 = T^*|_{\mathscr{D}}$.

例 3(续例 2)　设 $H = L^2[0,1]$,

$$\mathscr{D}(T) = \{f | f \in AC[0,1], f' \in H, f(0) = f(1) = 0\},$$

$$Tf = \mathrm{i}f', \quad \forall f \in \mathscr{D}(T),$$

则 T 闭对称,

$$\mathscr{D}(T^*) = \{f | f \in AC[0,1], f' \in H\},$$

$$T^* f = if', \forall f \in \mathscr{D}(T^*).$$

若 $T^* f = \pm \mathrm{i} f$, 即 $\mathrm{i}f' = \pm \mathrm{i}f$, 则 $f = \mathrm{e}^{\pm x}$, 所以 $d_+ = d_- = 1$, T 存在自伴延拓. 下面给出 T 的自伴延拓的具体形式.

方法一. $K_+ = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^x\}$, $K_- = \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{-x}\}$, 取 K_+ 与 K_- 的标准正交基 $\varphi_+ = \sqrt{\dfrac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}}\mathrm{e}^x$, $\varphi_- = \sqrt{\dfrac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}}\mathrm{e}^{1-x}$, 则 $\|\varphi_\pm\| = 1$, $K_+ \longrightarrow K_-$ 的酉算子 U 满足 $U\varphi_+ \to r\varphi_-$, $|r| = 1$. 于是 T 的自伴延拓为

$$T_r : \mathscr{D}(T_r) = \{\varphi + \alpha\varphi_+ + \alpha r \varphi_- | \varphi \in \mathscr{D}(T), \alpha \in \mathbf{C}\},$$

$$T_r f = \mathrm{i}f', \quad \forall f \in \mathscr{D}(T_r).$$

下面来看 $f \in \mathscr{D}(T_r)$ 满足怎样的边界条件?

$$f(0) = \alpha\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}} + \alpha r \mathrm{e}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}},$$

$$f(1) = \alpha \mathrm{e}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}} + \alpha r\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}},$$

所以 $f(1) = \dfrac{\mathrm{e} + r}{1 + r\mathrm{e}} f(0)$, 而 $\left|\dfrac{\mathrm{e} + r}{1 + r\mathrm{e}}\right| = 1$, 与例 2 所述一致.

反之, 若 $f \in \mathscr{D}(T^*)$, $f(1) = \dfrac{\mathrm{e} + r}{1 + r\mathrm{e}} f(0)$, 则由 von Neumann 分解公式,

$$f = \varphi + \alpha\varphi_+ + \beta\varphi_-,$$

$$\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}\alpha+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}\beta=\frac{\mathrm{e}+r}{1+r\mathrm{e}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}\alpha+\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}\beta\right),$$

$$\mathrm{e}\alpha+\beta=\frac{\mathrm{e}+r}{1+r\mathrm{e}}(\alpha+\mathrm{e}\beta)\Rightarrow\beta=r\alpha,$$

$$f=\varphi+\alpha\varphi_++r\alpha\varphi_-=\varphi+\alpha\varphi_++\alpha U\varphi_+,$$

$$\mathscr{D}(T_r)=\left\{f\in\mathscr{D}(T^*)|f(1)=\frac{\mathrm{e}+r}{1+r\mathrm{e}}f(0)\right\},$$

任何模为 1 的α 都可以表示为 $\alpha=\dfrac{\mathrm{e}+r}{1+\mathrm{e}r}$, 取 $r=\dfrac{\alpha-\mathrm{e}}{1-\alpha\mathrm{e}}$ 即可 (因为 $|\alpha|=1,1\neq\alpha\mathrm{e}$). 这样 T 的自伴延拓便与单位圆周点的个数一样多.

方法二. 对任意 $f,g\in\mathscr{D}(T^*)$,

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle&=(T^*f,g)-(f,T^*g)\\&=(\mathrm{i}f',g)-(f,\mathrm{i}g')\\&=\mathrm{i}f\overline{g}|_0^1\\&=\mathrm{i}(f(1)\overline{g(1)}-f(0)\overline{g(0)}),\end{aligned}$$

取 $\varphi=\alpha\varphi_++\beta\varphi_-$, 满足

$$0=\langle\varphi,\varphi\rangle=2\mathrm{i}(\|\alpha\varphi_+\|^2-\|\beta\varphi_-\|^2)=2\mathrm{i}(|\alpha|^2-|\beta|^2),$$

则 $\beta=\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\theta\in\mathbf{R}$, 当 $\alpha\neq0$ 时, $\varphi=\alpha(\varphi_++\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\varphi_-)$ 是模 $\mathscr{D}(T)$ 线性无关的. 令

$$\mathscr{D}=\{f\in\mathscr{D}(T^*)|\langle f,\varphi\rangle=0\},$$

则 $T^*|_{\mathscr{D}}$ 是 T 的自伴延拓.

事实上, 由 $\langle f,\varphi\rangle=0$, 得 $f(1)\overline{\varphi(1)}=f(0)\overline{\varphi(0)}$, 即 $f(1)=\dfrac{\overline{\varphi(0)}}{\overline{\varphi(1)}}f(0)$, 其中,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\varphi(0)}{\varphi(1)}\right|&=\left|\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}}{\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}}\right|\\&=\sqrt{\frac{1+\mathrm{e}^2+\mathrm{i}\mathrm{e}\cos\theta}{1+\mathrm{e}^2+\mathrm{i}\mathrm{e}\cos\theta}}\\&=1,\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{D}=\{f\in\mathscr{D}(T^*)|f(1)=rf(0)\},\quad |r|=1.$$

也可以利用定理 3 去找自伴延拓 Calkin 描述中的那些 $x_1, \cdots, x_d,$, 取 $h_1(x) = x, h_2(x) = 1 - x$, 则 $h_1, h_2 \bar{\in} \mathscr{D}(T)$, 但

$$\begin{aligned}
\langle h_1, h_1\rangle &= \mathrm{i}(h_1(1)\overline{h_1(1)} - h_1(0)\overline{h_1(0)}) = \mathrm{i},\\
\langle h_1, h_2\rangle &= \mathrm{i}(h_1(1)\overline{h_2(1)} - h_1(0)\overline{h_2(0)}) = 0,\\
\langle h_2, h_2\rangle &= -\mathrm{i},\\
\det(\langle h_i, h_j\rangle) &= \begin{vmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{vmatrix} = 1,
\end{aligned}$$

所以 h_1, h_2 模 $\mathscr{D}(T)$ 线性无关, 取 $\varphi = \alpha h_1 + \beta h_2, \alpha, \beta$ 不全为零. 由 $\langle \varphi, \varphi\rangle = 0$, 得 $|\varphi(1)|^2 = |\varphi(0)|^2$, 即 $|\alpha| = |\beta|$, T 的自伴延拓定义域为

$$\mathscr{D} = \{f \in \mathscr{D}(T^*) | \langle f, \varphi\rangle = 0\},$$

$\langle f, \varphi\rangle = 0$, 即 $f(1)\overline{\varphi(1)} = f(0)\overline{\varphi(0)}$, 即 $\overline{\alpha} f(1) = \overline{\beta} f(0)$, 记 $\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta \in \mathbf{R}$, 则 $\langle f, \varphi\rangle = 0$, 即 $f(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f(0)$, 从而

$$\mathscr{D} = \{f \in \mathscr{D}(T^*) | f(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f(0)\}.$$

例 4　设 $H = L^2[0, \infty)$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}(T) &= C_0^\infty(0, \infty),\\
Tf &= -f'', \quad f \in \mathscr{D}(T),
\end{aligned}$$

则

(1) T 对称.

对任意 $f, g \in \mathscr{D}(T)$,

$$(Tf, g) = \int_0^\infty -f''\overline{g}\mathrm{d}x = \int_0^\infty f'\overline{g'}\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(\overline{-g''})\mathrm{d}x = (f, Tg).$$

(2) T 有相等的亏指数.

解微分方程 $-y'' = \mathrm{i}y$ 得

$$y_1 = \mathrm{e}^{\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x} \notin L^2(0, \infty),$$

$$y_2 = \mathrm{e}^{\frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x} \in L^2[0, \infty),$$

所以 $d_+ = \dim\ker(T^* - \mathrm{i}I) = 1$. 同理, 解方程 $-y'' = -\mathrm{i}y$ 得

$$y_1 = \mathrm{e}^{\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x} \notin L^2[0, \infty), \quad y_2 = \mathrm{e}^{\frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x} \in L^2[0, \infty),$$

所以

$$d_- = \dim\ker(T^* + \mathrm{i}I) = 1.$$

(3) T 的自伴延拓 T_1.

因为

$$\int_0^\infty |\mathrm{e}^{\frac{-1\pm\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x}|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

令

$$\varphi_+ = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x}, \quad \varphi_- = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x}, \quad K_\pm = \mathrm{span}\{\varphi_\pm\},$$

作 $K_+ \to K_-$ 的酉算子 U:

$$U\varphi_+ = r\varphi_-, \quad |r| = 1,$$

则

$$\mathscr{D}(T_1) = \{\varphi + \beta\varphi_+ + r\beta\varphi_- | \varphi \in \mathscr{D}(\overline{T}), \beta \in \mathbf{C}\},$$

$$T_1 f = -f'', \quad f \in \mathscr{D}(T_1),$$

$$f(0) = \beta\varphi_+(0) + r\beta\varphi_-(0) = \sqrt[4]{2}\beta(1+r).$$

令 $\alpha = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \overline{\alpha} = \dfrac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$, 则

$$f'(x) = \varphi'(x) + \sqrt[4]{2}\beta\alpha\mathrm{e}^{\alpha x} + \sqrt[4]{2}r\beta\overline{\alpha}\mathrm{e}^{\overline{\alpha}x},$$

$$f'(0) = \sqrt[4]{2}\beta\alpha + \sqrt[4]{2}r\beta\overline{\alpha} = \sqrt[4]{2}\beta(\alpha + r\overline{\alpha}),$$

如果 $r \neq -1$, 则

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{\alpha + r\overline{\alpha}}{1+r},$$

$$\overline{\frac{\alpha + r\overline{\alpha}}{1+r}} = \frac{\overline{\alpha} + \overline{r}\alpha}{1+\overline{r}} = \frac{\overline{\alpha}r + \alpha}{r+1} = \frac{\alpha + r\overline{\alpha}}{1+r},$$

所以

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = -a \in \mathbf{R},$$

刻画自伴域的边条件是 $f'(0) + af(0) = 0$. 由 $\dfrac{\alpha + r\overline{\alpha}}{1+r} = -a$ 解得 $r = \dfrac{-a-r}{a+\overline{\alpha}}$.

当 $r = -1$ 时, 边条件变成 $f(0) = 0$.

以上是按 von Neumann 描述的处理, 至于按 Calkin 描述的处理见本书例 3.6.1.

参 考 文 献

[1] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京：科学出版社, 1965.

[2] 曹之江, 刘景麟. 奇异对称微分算子的亏指数理论. 数学进展, 1983, 12(3): 161~178.

[3] 刘景麟. 关于一类非自伴常微分算子的极限点情形与算子半群理论. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1982, 13(4): 361~372.

[4] 刘景麟. 关于常微分算式亏指数与边值问题适定性之间的某些联系. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1983, 14(4): 371~381.

[5] 刘景麟, 袁小平. 极限圆情形 Sturm-Liouville 自伴微分算子谱分解的一个初等证明. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1987, 18(4): 635~641.

[6] 刘景麟. 对称算子自伴延拓的 Calkin 描述. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1988, 19(4): 573~587.

[7] 尚在久, 朱瑞英. $(-\infty,\infty)$ 上对称微分算子的自伴域. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1986, 17(1): 17~28.

[8] Cao Z. On selfadjoint domains of 2-nd order differential expressions in limit-circle case. Acta Math Sinica, 1985, 1(3): 225~230.

[9] Coddington E A, Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, 1955.

[10] Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators. Part II. John Wiley and Sons, 1963.

[11] Eastham M S P, Thompson M L. On the limit-point, limit-circle classification of second-order ordinary differential equations. Quart J Math Oxford, 1973, 24: 531~535.

[12] Everitt W N. Some positive definite differential operators. J London Math Soc, 1968, 43: 465~473.

[13] Everitt W N. On the deficiency index problem for ordinary differential operators 1910~1976. Differential Equations: Proceedings from the Uppsala 1977 International Conference on Differential Equations, 62~81.

[14] Goldberg S. Unbounded linear operators: theory and applications, McGraw-Hill, 1966.

[15] Hille E. Lectures on ordinary differential equations. Addison-Wesley, 1969.

[16] Kauffman R M. On the limit-n classification of ordinary differential operators with positive coefficients. Proc London Math Soc, 1977, 35: 496~526.

[17] Kauffman R M, Read T T, Zettl A. The deficiency index problem for powers of ordinary differential expressions. Lecture Notes in Math. No.621, Springer-Verlag, 1977.

[18] Levitan B M, Sargsjan I S. Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators. AMS, 1975.

[19] Naimark M A. Linear differential operators. in Russian, 1954.

[20] Read T T. A limit-point criterion for expressions with intermittently positive coefficients. J London Math Soc 1977, 15: 271~276.

[21] Read T T. Second-order differential equations with small solution. J Math Anal Appl, 1980, 77: 165~174.

[22] Sun J. On the self-adjoint extensions of singular symmetric differential operators with middle deficiency indices. Acta Math Sinica, 1986, 2(2): 152~167.

[23] Titchmarsh E C. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Part I Oxford, 1962.

[24] Yosida K. Lectures on Differential and Integral Equation. New York: John Wiley and Sons. 1960.

[General Information]
书名=常微分算子谱论
作者=刘景麟著
页数=387
SS号=12148499
DX号=
出版日期=2009.1
出版社=科学出版社